SIMPLIZIALE KOMPLEXE IN ENDLICHEN GRUPPEN UND DEREN HOMOLOGIEDARSTELLUNGEN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jürgen Scheller
aus Hamburg

1983

SIMPLIZIALE KOMPLEXE IN ENDLICHEN GRUPPEN UND DEREN HOMOLOGIEDARSTELLUNGEN

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jürgen Scheller
aus Hamburg

1983

Tag der mündlichen Qualifikation: 5. Juli 1983

Dekan: Prof. Dr. A. Schönhage

1. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Schmid

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Ch. Hering

meinen Eltern

und

meiner Frau

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§1 Definitionen 8

§2 Beispiele 21

§3 Homologie 25

§4 Zusammenhängende Gruppenkomplexe 35

§5 Der Lefschetzcharakter 41

§6 Die stabilen Gruppenkammerkomplexe in der symmetrischen Gruppe Sym(4) 48

§7 Die abgeleiteten Komplexe $\Delta(J)$ und Δ_J 61

§8 Gruppenkomplexe mit Tophomologie vom Rang 1 70

§9 Coxetergruppen und Coxeterkomplexe 77

§10 Komplexe der Dimension 2 86

§11 Wohnungen 97

§12 Gruppen mit B,N-Paar und Gebäude 112

Literaturverzeichnis 125

Bezeichnungen 130

Einleitung

Witt [36] hat wohl als erster Simplizialkomplexe zur Untersuchung von Gruppen herangezogen, nämlich zur Bestimmung der Ordnung endlicher Spiegelungsgruppen. Solomon [21] hat 25 Jahre später den gleichen Komplex benutzt zur Berechnung der Ordnung endlicher Chevalleygruppen. In beiden Fällen handelt es sich um nichts anderes als die zugrundeliegenden "Coxeterkomplexe". Tits [33] erkannte, daß man - in Entsprechung zur Bescheibung von Permutationsdarstellungen - diese Komplexe mit solchen bestehend aus gewissen Nebenklassenmengen identifizieren kann. Er hat sogar die Geometrie von Chevalleygruppen durch einen ähnlich konstruierten Komplex ("Gebäude") beschrieben.

Steinberg erkannte, daß jede endliche Chevalleygruppe $G = G(p^n)$ einen eindeutig bestimmten absolut irreduziblen Modul (über $\mathbb{Q}$) besitzt, dessen Dimension gleich der Ordnung einer p-Sylowgruppe ist. Tits und Solomon [23] konnten diesen "Steinbergmodul" realisieren als den Homologiemodul $H_\ell(\Delta,\mathbb{Q})$, wobei Δ das zugehörige Gebäude und $\ell = \dim \Delta$ ist ("Tophomologie"). Das Gebäude kann nach Tits als "G-Komplex" aufgefaßt werden, d.h. man hat eine simpliziale Wirkung der Gruppe. Die Homologiemoduln können so als Verallgemeinerung der Permutationsmoduln gedeutet werden.

Eine allgemeine Theorie solcher Homologiedarstellungen endlicher Gruppen auf beliebigen Simplizialkomplexen wird von Curtis entwickelt (vgl. [10], [11]). Gegenstand dieser Arbeit sind die im Sinne von Tits (eher konkret vorliegenden) innerhalb einer festen Gruppe gegebenen "Gruppenkomplexe". Aufgabenstellung ist einerseits die Entwicklung von Verfahren zur Berechnung von Homologiemoduln. Andererseits interessiert natürlich auch die Frage, inwieweit aus der Homologie Rückschlüsse auf den Komplex und die Gruppe möglich sind. Es sei ausdrücklich vermerkt, daß topologische Erörterungen ("Realisierung") in dieser Arbeit keine Rolle spielen. Dies ist für die Homologie von Gruppenkomplexen auch nicht relevant.

Ein Gruppenkomplex ist wie folgt definiert: Sei G eine Gruppe und sei $(G_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie von Untergruppen von G. Der zugehörige Gruppenkomplex $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ hat als Simplices die Paare (J,x) für nichtleere Teilmengen J von I und $x\in G$, wobei wir identifizieren

$$(J,x) = (K,y) :\Leftrightarrow J=K \text{ und } G_j x = G_j y \text{ für alle } j\in J.$$

Ein Simplex (J,x) ist Seite von (K,y), falls $J\subseteq K$ und $G_j x = G_j y$ für alle $j\in J$ gilt. Δ ist in natürlicher Weise ein G-Komplex. G operiert (simplizial) via

$$(J,x)g = (J,xg)$$

für ein $g \in G$. Δ besitzt eine kanonische Typenabbildung ("Färbung")

$$(J,x) \mapsto J,$$

bezüglich der G offensichtlich "typerhaltend" wirkt. Die Kammern von Δ, d.h. die maximalen Simplices sind von der Gestalt (I,x), $x \in G$.

Wir haben folgende Charakterisierung der Gruppenkomplexe (für die Begriffe siehe §1): Ein Simplizialkomplex ist genau dann isomorph zu einem Gruppenkomplex, wenn er eine Färbung besitzt und die Gruppe der typerhaltenden Automorphismen transitiv auf den Kammern operiert (1.6).

Grundlegendes Hilfsmittel zur Berechnung von Homologiemoduln ist die Spurformel von Hopf-Lefschetz (vgl. §5). Sie ist immer dann nützlich, wenn "fast alle" Homologiemoduln verschwinden (siehe etwa die Anwendungen in (9.4) und (12.5)). Wie aufwendig die konkrete Berechnung selbst bei Gruppen kleiner Ordnung sein kann, zeigt Abschnitt 6.

Informationen über die Homologie liefert auch das Übergehen zu geeigneten Teilkomplexen (bzw. Faktorkomplexen). Wir untersuchen insbesondere (in §7) die sogenannten "abgeleiteten" Komplexe $\Delta(J)$ und Δ_J zu

$\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$:

$$\Delta(J) = \Delta(G,(G_j)_{j\in J});$$
$$\Delta_J = \Delta(\bar{G},(\bar{G}\cap G_j)_{j\in J}),\ \bar{G}=\bigcap_{i\in I-J} G_i.$$

Es gibt eine (simpliziale) Einbettung $\Delta_J \hookrightarrow \Delta(J)$ (vgl. (7.2)). Eine Folgerung aus dieser "schwachen Dualität" ist z.B., daß die Tophomologie von Δ immer dann verschwindet, wenn die Tophomologie von $\Delta(J)$ trivial ist (bei beliebigen Koeffizienten; vgl. (7.3)).

Das Studium der Arbeit [23] von Solomon zeigt, daß die "Wohnungen" (in Gebäuden) und deren Lage zueinander von fundamentaler Bedeutung für die Berechnung der Homologie sind. (Die Realisierung eines Gebäudes ist homotopie-äquivalent zu einem Büschel von Sphären.) Wir definieren für beliebige Gruppenkomplexe Wohnungen als "dünne Kammerteilkomplexe mit 1-dimensionaler Tophomologie". Bei Gebäuden ist dies der übliche Begriff. Wir geben ein Verfahren an, wie man Wohnungen aus kleineren Einheiten ("J-Kreisen") konstruieren kann (§ 11). Die Existenz einer Wohnung impliziert zum Beispiel, daß die Tophomologie nichttrivial ist. Nicht klären in diesem Zusammenhang konnte ich, ob die Tophomologie allein durch die Wohnungen bestimmt ist. (Dies ist richtig in den klassischen Fällen.) Nicht hilfreich sind dabei Erörterungen wie sie etwa von Björner [2] angestellt wurden; er betrachtet soge-

nannte "shellable complexes", deren Definition so gemacht ist, daß der Beweis von Solomon-Tits funktioniert.

Kürzlich hat Tits [35] einen neuen Zugang zur Theorie der Gebäude eröffnet über "Kammersysteme", wobei Wohnungen nicht mehr explizit erscheinen. Diese für die Geometrie und die Beschreibung der sporadischen einfachen Gruppen vermutlich höchst wichtige Methode scheint mir für die Konstruktion von Homologiedarstellungen nicht so geeignet. (Die Bescheibung des entsprechenden Komplexes innerhalb einer Gruppe ist im nichtklassischen Fall komplizierter.) Erwähnt sei auch, daß man jeder Geometrie einen "Fahnenkomplex" zuordnen kann (im Sinne von Buekenhout [6] etwa), allgemeiner sogar jeder geordneten Menge (Stanley [26]). Ist die Automorphismengruppe der Struktur hinreichend homogen, kann man ihr einen Gruppenkomplex zuordnen, der die Struktur widerspiegelt.

Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex mit bekannter Homologie. Dann kann man natürlich nur Information über G modulo $G_I = \bigcap_{i\in I} G_i$ erwarten. Sei also $G_I = 1$ vorausgesetzt. Ist Δ von der Dimension 1, so ist G durch Δ bis auf Isomorphie immer dann eindeutig bestimmt, wenn Δ ein Baum ist (Serre [20], S.55). Bei der entsprechenden Verallgemeinerung auf höhere Di-

mensionen stößt man auf erhebliche technische Schwierigkeiten. Serre's Resultat hat jüngst im Zusammenhang mit Kammersystemen grundlegende Bedeutung gewonnen (siehe etwa Goldschmidt [15]).

Lange Zeit hat mich folgende Frage beschäftigt: Angenommen, Δ hat die Homologie eines Coxeterkomplexes. Ist G eine Coxetergruppe? Ich konnte dies schließlich nur für den Fall der Dimensionen 1 und 2 angreifen (§10). Dies zeigt die Schwierigkeiten, auf die man bei derartigen Fragestellungen stößt. Sätze allgemeiner Art, die überwiegend Kenntnis der Tophomologie voraussetzen, habe ich in §§4,8 angegeben. Ist z.B. die Tophomologie $H_\ell(\Delta) = H_\ell(\Delta,\mathbb{Z})$ vom Range 1, so hat G einen Normalteiler mit Index 2. Ist ferner der Rang der Tophomologie teilerfremd zur Ordnung von G, so ist Δ ein Kammerkomplex (d.h. setzt man $G(i) = \bigcap_{j\in I-\{i\}} G_j$, so ist $G = \langle G(i) \mid i\in I\rangle$).

Weitgehend offen bleibt auch die Frage, welche (irreduziblen) Moduln einer Gruppe als Homologiemoduln eines geeigneten Gruppenkomplexes auftreten. Bei Coxetergruppen ist relativ leicht zu sehen, daß die Homologiemoduln der vom Standardkomplex abgeleiteten Komplexe alle irreduziblen Darstellungen (über $\mathbb{Q}$) enthalten (vgl.§9). Bei Chevalleygruppen (§12) erhält man auf diese Weise (natürlich) nur die Darstellungen in der Hauptserie, d.h. die übrigen Darstellungen

können allenfalls durch Hinzunahme von Nichtstandard-Komplexen gewonnen werden. Ob dies erfolgversprechend ist, weiß ich nicht und scheint auch im Augenblick noch unangreifbar. Die Darstellungstheorie der Chevalleygruppen ist keineswegs abgeschlossen.

Herrn Prof. Dr. P. Schmid danke ich herzlich für die Anregung dieser Arbeit. Ich schulde ihm mehr als nur formalen Dank für seine Geduld, Ermutigung und Unterstützung auch in schwerer Zeit.

§1 Definitionen

(1.1) Grundlegend für diese Arbeit ist der Begriff des simplizialen Komplexes. Sei E eine Menge und $\Delta \subseteq \mathbb{P}(E)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von E, bestehend aus endlichen Mengen. Δ heißt simplizialer Komplex auf E, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. z.B. Spanier[24], Chap.III, p.108; Bredon [5], Chap.III, p.115):

$$\text{(i) } \{v\} \in \Delta \text{ für alle } v \in E;$$

$$\text{(ii) } s \in \Delta \Rightarrow \mathbb{P}(s) \subseteq \Delta.$$

Die Elemente von Δ heißen Simplices. Ist $s \in \Delta$ mit $|s|=n+1$, so heißt s Simplex der Dimension n oder kurz n-Simplex. Die Menge der n-Simplices von Δ bezeichnen wir mit $sx_n(\Delta)$, $\dim \Delta := \sup \{\dim s \mid s \in \Delta\}$ bezeichnet die Dimension von Δ ($\dim \Delta = \infty$ ist möglich!). Gilt $s \subsetneq t$ für $s,t \in \Delta$, so heißt s Seite von t. Ein Morphismus von simplizialen Komplexen ist eine Abbildung der Eckenmengen, die Simplices auf Simplices abbildet.

Beispiele.

(a) Ist $s \in \Delta$, so ist $\Delta' := \mathbb{P}(s)$ ein Teilkomplex von Δ. Für den Komplex $\mathbb{P}(s)$ schreiben wir in der Regel einfach s.

(a') $\Delta^n := \{s \in \Delta \mid \dim s \leq n\}$ ist ein Teilkomplex von Δ und heißt das n-dimensionale Gerüst von Δ.

(b) 0-dimensionale Komplexe sind Mengen (ohne zusätzliche Struktur).

(c) 1-dimensionale Komplexe sind Graphen (schlicht, nichtorientiert).

(d) Seien $e_0,\ldots,e_k$ unabhängige Punkte im affinen $\mathbb{R}^n$ ($n \geq k$). Dann heißt die konvexe Hülle S_k der $\{e_i\}_{i=0,\ldots,k}$ das von den e_i aufgespannte affine Simplex;

$$S_k = \{\sum_{i=0}^{k} a_i e_i \mid a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1\}.$$

S_k kann zusammen mit seinen Seiten als Realisierung des k-dimensionalen Simplex $\mathbb{P}(\{e_0,\ldots,e_k\})$ aufgefaßt werden. (Die sich hieraus ergebenden topologischen Aspekte der Theorie simplizialer Komplexe werden in dieser Arbeit außer acht gelassen.)

(e) Sei Δ ein simplizialer Komplex. Die baryzentrische Unterteilung $b(\Delta)$ hat als Ecken die Simplices von Δ. Die Simplices von $b(\Delta)$ sind Mengen $\{s_0,\ldots,s_k\}$ von Simplices von Δ mit (evtl. nach Umnumerierung)

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \ldots \subseteq s_k,$$

d.h. die Elemente von $b(\Delta)$ sind Fahnen von Simplices von Δ.

In dieser Arbeit werden wir uns mit speziellen simplizialen Komplexen beschäftigen. Für Probleme im Zusammenhang mit beliebigen simplizialen Komplexen sei auf Bücher über algebraische Topologie und verwandte Gebiete (z.B. Bredon [5], Spanier[24]) verwiesen.

(1.2) Sei G eine Gruppe und sei $(G_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie von Untergruppen von G. Sei

$$E = \bigcup_{i\in I} \{G_i x \mid x\in G\}.$$

Ist J eine nichtleere Teilmenge von I und sind x_i Elemente von G für $i\in J$, so schreiben wir $(G_i x_i)_{i\in J}$ für die Teilmenge von E bestehend aus den Bildern der entsprechenden Nebenklassen. $(G_i x_i)_{i\in J}$ heiße ein Simplex, falls $\bigcap_{i\in J} G_i x_i \neq \emptyset$ ist. Die Menge all dieser Simplices ist (zusammen mit der leeren Menge) ein Simplizialkomplex Δ auf E.
(Selbstverständlich ist es möglich, die gleiche Konstruktion auch für Linksnebenklassen durchzuführen. In dieser Arbeit verstehen wir jedoch unter Nebenklassen ausschließlich Rechtsnebenklassen.)

Definition (vgl. Tits [34], 1.4). Der Komplex Δ heißt Gruppenkomplex in G zur Familie von Untergruppen $(G_i)_{i\in I}$. Er wird in der Folge stets mit $\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ bezeichnet.

Erstmals ordnete Witt [36] einer endlichen Euklidischen Spiegelungsgruppe einen simplizialen

Komplex zu, nämlich den Fundamentalbereich, der von den die erzeugenden Spiegelungen definierenden Hyperebenen erzeugt wird. Witt bestimmte u.a. die Ordnung der Spiegelungsgruppe. Solomon [21] griff diese Idee von Witt auf, um eine multikative Formel für die Ordnung der Chevalleygruppen neu zu beweisen. Der verwendete simpliziale Komplex ist jeweils isomorph zum Standardkomplex (vgl. §9) der Spiegelungsgruppe bzw. der Weylgruppe. Gruppenkomplexe in unserem Sinne erscheinen explizit wohl erst in Tits [33], und zwar für Gruppen mit B,N-Paar. Die Definition für beliebige Gruppen findet sich in einer Monographie von Tits [34]. Eine abstrakte Definition geben wir in (1.6) an.

Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex . Wir werden die Simplices von Δ etwas handlicher beschreiben. Sei $\emptyset \neq J \subsetneq I$. Sei ferner $s = (G_i x_i)_{i\in I}$ ein Simplex in Δ, also

$$\bigcap_{i\in J} G_i x_i \neq \emptyset.$$

Wähle ein Element $x \in \bigcap_{i\in J} G_i x_i$. Dann ist $G_i x_i = G_i x$ für alle $i\in J$ und somit $s = (G_i x)_{i\in J}$. Umgekehrt ist $(G_i x)_{i\in J}$ für jede nichtleere Teilmenge J von I und jedes $x\in G$ auch ein Simplex in Δ, d.h. alle Simplices

von Δ sind vom Typ

$$(J,x) := (G_i x)_{i\in J}.$$

Hierbei gilt natürlich $(J,x) = (K,y)$ genau dann, wenn $J=K$ und $G_i x = G_i y$ für alle $i\in J$ ist, d.h. (J,x) steht für die Klasse des geordneten Paares in $\mathcal{P}(I)\times G$ bezüglich der entsprechenden Äquivalenzrelation. Setzen wir

$$G_J := \bigcap_{i\in J} G_i$$

so gilt also

$$(J,x) = (K,y) \quad <\!\!> \quad J=K \text{ und } xy^{-1}\in G_J,$$

und (J,x) Seite von (K,y) $<\!\!>$ $J\subseteq K$ und $xy^{-1}\in G_J$.

Die Gruppe G operiert in kanonischer Weise (simplizial) von rechts auf Δ via

$$(J,x)g := (J,xg)$$

für $g\in G$. Es gilt $(J,x)=(J,x)g$ genau dann, wenn $G_i xg = G_i x$ für alle $i\in J$ ist. Läßt also $g\in G$ ein Simplex von Δ fest, so auch alle seine Seiten (G operiert "homogen" auf $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$. Die Menge

der (J,1) bildet offensichtlich ein Repräsentantensystem für die G-Bahnen von Δ. Die Simplices (J,1) heißen die Fundamentalsimplices. Diese sind gerade die Seiten von (I,1), der sogenannten Fundamentalkammer. Unter Kammern versteht man allgemein die maximalen Elemente eines Simplizialkomplexes. Hier ist also

$$\text{cham } \Delta = \{(I,x) \mid x \in G\}.$$

(I,1) heißt Fundamentalkammer.

(1.3) Ein simplizialer Komplex Δ heißt G-Komplex, falls G auf Δ simplizial operiert (von rechts). Sind Δ,Δ' G-Komplexe, so ist ein simplizialer Morphismus ein G-Morphismus, falls er mit der Wirkung von G vertauschbar ist. Ist $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex, so ist Δ nach (1.2) ein G-Komplex. Sei $\Delta' = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein weiterer Gruppenkomplex in G. Δ und Δ' heißen konjugiert (in G), falls $x \in G$ derart existiert, daß (evtl. nach Umnumerierung)

$$H_i = G_i^x$$

für alle $i \in I$ gilt. Wir schreiben dann $\Delta^x = \Delta'$. In diesem Sinne operiert G auf der Menge der Gruppenkomplexe in G.

Lemma. Seien $\Delta_1 = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ und $\Delta_2 = \Delta(G,(H_i)_{i\in I})$ Gruppenkomplexe in G. Genau dann ist Δ_1 G-isomorph zu Δ_2, wenn Δ_1 und Δ_2 konjugiert sind.

Beweis. Sei $\psi: \Delta_1 \to \Delta_2$ ein G-Isomorphismus. Dann führt ψ bijektiv n-Simplices in n-Simplices über für jedes $n \geq 0$. Wir numerieren die 0-Simplices (Ecken) $G_i = (i,1)_{\Delta_1}$ so, daß $\psi(G_i) = H_i x_i$ für geeignetes $x_i \in G$ gilt ($i \in I$). Nun ist

$$\psi((I,1)_{\Delta_1}) = (H_i x_i)_{i \in I} = (I,x)_{\Delta_2}$$

für geeignetes $x \in G$, daher $H_i x_i = H_i x$ für jedes i. Aufgrund der G-Verträglichkeit von ψ ist schließlich

$$G_i = \mathrm{Stab}_G(G_i) = \mathrm{Stab}_G(H_i x) = H_i^x.$$

Gilt umgekehrt diese Beziehung für jedes $i \in I$, so induziert offenbar die Eckenabbildung $G_i y \to H_i xy$ einen G-Isomorphismus von Δ_1 auf Δ_2. □

Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i \in I})$ ein Gruppenkomplex. Wir fassen die Gruppen G_i, $i \in I$, in Klassen bestehend aus zueinander konjugierten Gruppen zusammen. Besteht eine Klasse aus den Gruppen G_j, $j \in J \subseteq I$, so bezeichnen wir sie mit C(J). Die den Klassen entsprechenden Teilmengen von I liefern eine Partition P von I. Setzen wir

$$S_J := \mathrm{Stab}_G(C(J)),$$

so gibt es $n = |G: \bigcap_{J \in P} S_J|$ zu Δ konjugierte Gruppenkomplexe. Ist $|C(J)| = 1$ für alle $J \in P$, so ist $n = |G: \bigcap_{i \in I} N_G(G_i)|$. Ist z.B. $G_i \trianglelefteq G$ für alle $i \in I$, so besteht die Konjugiertenklasse von Δ nur aus dem Komplex Δ selbst.

(1.4) In (1.2) haben wir einen simplizialen Komplex in einer Gruppe G konstruiert, der auf der Wirkung von G auf sich per Rechtsmultiplikation basiert. Analoges wollen wir jetzt bezüglich Konjugation in G durchführen.

Sei wieder I eine endliche Menge, G eine Gruppe und $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untergruppen von G. Setze

$$E^C := \coprod_{i\in I} \{G_i{}^x \mid x\in G\}.$$

Wie in (1.2) schreiben wir die Elemente von E^C in der Form $(G_i{}^{x_i})_{i\in J}$, $\emptyset\neq J\subseteq I$, $x_i\in G$.

Setzen wir

$$\Delta^C := \{(G_i{}^{x_i})_{i\in J} \mid \emptyset \neq \bigcap_{i\in J} G_i{}^{x_i}\},$$

so definiert Δ^C einen simplizialen Komplex auf E^C. Analog zu (1.2) kann Δ^C identifiziert werden mit $\{(J,x) \mid \emptyset\neq J\subseteq I,\ x\in G\}$ modulo der Äquivalenzrelation

$$(J,x) = (K,y) :\Longleftrightarrow J=K \text{ und } xy^{-1} \in \bigcap_{i\in J} N_G(G_i)\ .$$

Wir bezeichnen diesen Komplex mit $\Delta^C(G,(G_i)_{i\in I})$. Beachten wir jetzt noch, daß G auf Δ^C via Konjugation operiert: $(J,x)^g = (J,x^g) = (J,g^{-1}xg)$, so ist der folgende Satz offensichtlich.

Satz. Sei I eine endliche Menge, G eine Gruppe, und sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untergruppen von G.

Dann gilt die folgende Isomorphie von simplizialen G-Komplexen:

$$\Delta^C(G,(G_i)_{i\in I}) \cong \Delta(G,(N_G(G_i)_{i\in I}).$$

Insbesondere gilt: $\Delta^C(G,(G_i)_{i\in I}) \cong \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ genau dann, wenn $N_G(G_i) = G_i$ für alle $i\in I$. Dies ist z.B. für die Standardkomplexe von Gruppen mit B,N-Paaren richtig (vgl. §12). □

Aufgrund des vorangehenden Satzes können wir uns in dieser Arbeit auf die Diskussion der Gruppenkomplexe $\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ beschränken.

(1.5) Wir wollen jetzt eine Klasse von Komplexen einführen, die die Gruppenkomplexe enthält. Sei Δ ein simplizialer Komplex, I eine endliche Menge mit $|I| = \dim \Delta + 1$. Sei $f:E \to I$ eine Abbildung der Eckenmenge von Δ in I. Die Fortsetzung $\hat{f}$ von f auf Δ bilde einen Simplex s auf $\{f(e)|e\in s\}$ ab. $\hat{f}:\Delta \to \mathbb{P}(I)$ ist ein Morphismus simplizialer Komplexe. Ist $|\hat{f}(s)| = \dim s + 1$ für alle $s\in\Delta$, so heißt $\hat{f}$ Typenabbildung (oder Färbung). Im folgenden unterscheiden wir f und $\hat{f}$ in der Notation nicht. Ist f eine Typenabbildung, so heißt (Δ,I,f) gefärbter Komplex. (Haben alle Kammern von Δ die gleiche Dimension, so wird (Δ,I,f) in der Literatur als "numeriert", Bourbaki [3], p.42, "balanced" bei Björner [2] oder "completely balanced" bei Stanley [25] bezeichnet.)

Ist $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex und definieren wir $f(G_i x)_{i\in J} = J$ für $\emptyset \neq J \subseteq I$ und $x \in G$, so ist (Δ,I,f) ein gefärbter Komplex. Stets ist diese (natürliche) Färbung gemeint wenn ein Gruppenkomplex als gefärbter Komplex aufgefaßt wird.

Seien (Δ,I,f) und (Δ',I,f') gefärbte Komplexe zur gleichen Farbenmenge I. Ein Paar (φ,σ), $\varphi:\Delta \to \Delta'$ ein simplizialer Morphismus, $\sigma \in \mathrm{Sym}(I)$, ist ein Morphismus gefärbter Komplexe, falls

$$f'(\varphi(s)) = \sigma(f(s)) \quad \text{für alle } s\in\Delta$$

gilt. Ein Automorphismus φ eines gefärbten Komplexes (Δ,I,f) heißt typerhaltend, falls $f(s) = f(\varphi(s))$ für alle $s\in\Delta$ gilt. Die Gruppe der typerhaltenden Automorphismen von (Δ,I,f) bezeichnen wir mit $\mathrm{Taut}(\Delta,I,f)$ bzw. mit $\mathrm{Taut}\,\Delta$, sofern f und I aus dem Zusammenhang ersichtlich sind.

Seien $\Delta_1 = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ und $\Delta_2 = \Delta(G,(H_i)_{i\in I})$ Gruppenkomplexe in G. Ist $\varphi: \Delta_1 \to \Delta_2$ ein G-Isomorphismus, so ist φ auch ein Morphismus gefärbter Komplexe. Dies folgt aus dem Lemma in (1.3). Ist φ ein Isomorphismus gefärbter G - Komplexe, so ist φ i.allg. kein G-Isomorphismus, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Sei $G = \mathrm{Sym}(4)$, G_o ein Punktstabilisator, G_1 der Normalteiler von G der Ordnung 4 und G_2 eine zyklische Untergruppe von G der Ordnung 4.

$\Delta_1 = \Delta(G,(G_i)_{i=o,1})$ und $\Delta_2 = \Delta(G,(G_i)_{i=o,2})$ sind als gefärbte Komplexe isomorph ($\Delta_i = K_{6,4}$), aber nicht als G-Komplexe.

(1.6) Wir wollen klären, wann ein gefärbter Komplex isomorph zu einem Gruppenkomplex ist.

Satz. Sei (Δ,I,f) ein gefärbter Komplex. Sei weiter $G \leq$ Taut Δ, transitiv auf den Kammern von Δ. Dann gibt es (bis auf Konjugiertheit in G) genau einen Gruppenkomplex in G, der als gefärbter G-Komplex isomorph zu (Δ,I,f) ist.

Beweis. Da G transitiv auf den Kammern von Δ operiert, hat jede Kammer dieselbe Dimension n= dim Δ. Sei $c = \{v_o,\ldots,v_n\}$ eine feste Kammer mit Ecken v_i. Sei $G_i = \mathrm{Stab}_G(v_i)$ und sei $c(J)=\{v_i \in c \mid i \in J\}$ für jede nichtleere Teilmenge $J \subseteq I$. Da G typerhaltend auf Δ operiert, gilt $\mathrm{Stab}_G(c(J)) = \bigcap_{i\in J} G_i$. Da überdies jedes Simplex in einer geeigneten Kammer liegt und G auf diesen nach Voraussetzung transitiv wirkt, ist die G-Bahn

$$(c(J))G = \{s \in \Delta \mid f(s)=J\}.$$

Folglich ist Δ isomorph zu $(G,(G_i)_{i\in I})$ als G-Komplex. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma (1.3). □

Wir geben nun eine abstraktere Definition eines Gruppenkomplexes und charakterisieren diejenigen simplizialen Komplexe, die Gruppenkomplexe sind.

Definition. Ein simplizialer Komplex Δ heißt Gruppenkomplex, falls es eine Gruppe G mit einer Familie von Untergruppen $(G_i)_{i\in I}$ derart gibt, daß Δ als simplizialer Komplex isomorph zu $(G,(G_i)_{i\in I})$ ist.

Satz. Sei Δ ein simplizialer Komplex. Genau dann ist Δ ein Gruppenkomplex, wenn Δ eine Färbung besitzt (d.h. es existiert eine endliche Menge I und eine Abbildung $f:\Delta \to I$ mit den Eigenschaften einer Färbung) und Taut Δ transitiv auf den Kammern von Δ operiert.

Beweis. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem vorangehenden Satz. Die Notwendigkeit ist klar. □

Folgerung. Sei Δ ein simplizialer G-Komplex und seien Ω_i, $i\in I$, die G-Bahnen auf der Eckenmenge von Δ. Genau dann ist Δ isomorph als G-Komplex zu einem Gruppenkomplex in G, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind

(i) $|s\cap\Omega_i|\leq 1$ für alle $s\in\Delta$ und für alle $i\in I$,

(ii) G operiert transitiv auf den Kammern von Δ.

Beweis. Die Notwendigkeit beider Bedingungen ergibt sich aus der Definition eines Gruppenkomplexes. Die Bedingung ist auch hinreichend, weil die Abbildung

$f:\Delta \to \mathbb{P}(I)$, $s \mapsto \{i \in I \mid |\Omega_i \cap s| = 1\}$ eine Färbung liefert, bzgl. der G typerhaltend operiert, und damit der vorangehende Satz angewendet werden kann. □

Die Notation von §1 bleibt während der ganzen Arbeit fest, es sei denn es wird ausdrücklich anderes gesagt.

§2 Beispiele

In diesem Paragraphen bezeichne stets $\Delta=\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ einen Gruppenkomplex.

(2.1)(a) Sei $G_k=G$ für ein festes $k\in I$. Für jedes Simplex (J,x) von Δ ist dann auch $(J,x)\cup(\{k\},1)=(J\cup\{k\},x)$ ein Simplex von Δ (Δ ist "sternförmig").

(b) Sei $I=\{0,1\}$ und $G_0=G_1$. Δ ist ein Graph, der aus lauter unverbundenen Kanten - zu jeder Restklasse $G_0x=G_1x$, $x\in G$, eine - besteht.

(2.2) Um "Ausartungen" wie bei den eben beschriebenen Komplexen zu vermeiden, definieren wir:

Definition. Ein Gruppenkomplex $\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ heißt stabil, falls die Abbildung $J\mapsto\bigcap_{i\in J}G_i$ eine injektive Abbildung von $\mathfrak{P}(I)$ in den Verband der Untergruppen von G ist.

Aufgrund von (1.2) können wir in diesem Fall die Simplices von Δ mit den Nebenklassen der Untergruppen G_J, $\emptyset\neq J\subseteq I$, identifizieren. Dabei gilt

$$G_Jx \text{ Seite von } G_Ky \Leftrightarrow J\subseteq K \text{ und } xy^{-1}\in G_J.$$

Wir setzen $G(i):=G_{I-\{i\}}$ für $i\in I$.

Satz. Genau dann ist $\Delta=\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ stabil, wenn $G(i)\neq G_I$ für alle $i\in I$ gilt.

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sei umgekehrt angenommen, es existierten nichtleere Teilmengen $J \neq K$ von I mit $G_J = G_K$. Sei etwa $J-K \neq \emptyset$ und $j \in J-K$. (Andernfalls ist $K-J \neq \emptyset$ und das Argument analog.) Ist $M = I-(J \cup K)$, so gilt

$$G(j) \leq G_M \cap G_K \leq G_M \cap G_K \cap G_J \leq G_I.$$

Dies beweist den Satz. □

(2.3) Sei $G = \langle s_o s_1 \mid s_o^2 = s_1^2 = (s_o s_1)^n = 1 \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 2n. Setzen wir $G_o = \langle s_o \rangle$, $G_1 = \langle s_1 \rangle$ und $G_2 = \langle s_o s_1 \rangle$, so ist $\Delta_1 = \Delta(G, (G_i)_{i=o,1})$ isomorph zum regulären 2n-Eck und $\Delta_2 = \Delta(G, (G_i)_{i=o,2})$ ist isomorph zum vollständigen, bipartiten Graphen $K_{2,n}$. Die simpliziale (Graph-)Automorphismengruppe von Δ_1 ist isomorph zu D_{4n}, aber

$$\text{Taut } \Delta_1 \cong D_{2n};$$

G induziert die volle Gruppe der typerhaltenden Automorphismen (vgl.(1.2)). Die simpliziale (Graph-) Automorphismengruppe von Δ_2 ist isomorph zu $\mathrm{Sym}(n) \times Z_2$. Hier ist jedoch jeder Automorphismus auch typerhaltend. Setzen wir $\Delta_3 = (G, (G_i)_{i=1,2})$, so sind Δ_2 und Δ_3 isomorph als gefärbte Komplexe und konjugiert genau dann, wenn n ungerade ist.

(2.4) Sei H eine Untergruppe von G und sei $G_i = H_i \leq H$ angenommen für alle $i \in I$. Dann kann $\Delta_1 = \Delta(H,(H_i)_{i\in I})$ als Teilkomplex von Δ aufgefaßt werden. Wir nennen dann

$$\Delta = (\Delta_1)_H^G$$

den von Δ_1 <u>induzierten</u> Gruppenkomplex. Ist R ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von H in G, so können wir formal die Simplices von $(\Delta_1)_H^G$ als Tensoren $(J,h)\otimes r$ mit eindeutig bestimmten $r\in R$ schreiben ((J,h) ein Simplex von Δ_1). G operiert auf diesen Tensoren via

$$((J,h)\otimes r)g = (J,hh')\otimes r'$$

wobei $r'\in R$ und $h'\in H$ bestimmt sind durch $rg=h'r'$. Die Zuordnung $(J,x) \mapsto (J,h)\otimes r$ für $x=hr (h\in H, r\in R)$ ist ein G-Isomorphismus $\Delta \to (\Delta_1)_H^G$.

<u>Beispiel</u>. $H=S_3$, H_o, H_1 zwei erzeugende Untergruppen der Ordnung 2. $\Delta_1 = \Delta(H,(H_i)_{i=o,1}) \cong$
H läßt sich auffassen als Untergruppe von $D_{12}=G$. Es gilt dann für den induzierten Komplex

$\Delta = \Delta(G,(H_i)_{i=o,1}) \cong$

(2.5) Sei $J\subseteq I$, $|J|\geq 2$. Der Komplex $\Delta(J) = \Delta(G,(G_i)_{i\in J})$ ist ein Teilkomplex von Δ. (Für spätere Verwendung (3.3)

definieren wir analog: Ist $s=(K,y)$ ein Simplex von Δ mit $K \supseteq J$, so sei $s(J) = (J,y)$ die eindeutig bestimmte Seite von s vom Typ J.) Die Eckenmenge von $\Delta(J)$ besteht aus den Ecken $e \in \Delta$ mit $f(e)=j$ für ein geeignetes $j \in J$. Die Kammern von $\Delta(J)$ sind die Simplices (J,x), $x \in G$ von Δ.

(2.6) Für $J \subseteq I$, $|J| \geq 2$ setzen wir $\Delta_J := \Delta(G_{\bar{J}}, (G_{\bar{J}} \cap G_i)_{i \in J})$. Δ_J ist der Stern von $(\bar{J},1)$ in Δ. (Der Stern eines Simplexes s in Δ ist der simpliziale Komplex, der aus allen s als Seite enthaltenden Simplices von Δ besteht.) Es gilt dann $G_J(i)=G(i)$ für alle $i \in J$, d.h. die Menge der Elemente der Codimension 1 in Δ_J entsteht durch Einschränkung der Cotypenmenge auf J und der Restklassen auf $G_{\bar{J}}$.

(2.7) Sei $\Delta=\Delta(G,(G_i)_{i \in I})$ ein Gruppenkomplex. Die baryzentrische Unterteilung $b(\Delta)$ (siehe (1.1)(e)) ist im allgemeinen kein Gruppenkomplex. Betrachte $G=\mathrm{Alt}(4)$, $I=\{0,1\}$, $G_0=\langle(123)\rangle$, $G_1 = V_4$; Aut $b(\Delta)$ besitzt drei Bahnen auf den Kammern in $b(\Delta)$.

§3 Homologie

Wir definieren zu gefärbten Komplexen Δ mit endlicher Farbenmenge I die orientierte simpliziale Homologie. Diese liefert Moduln für Untergruppen G von Taut Δ. Einfache Hilfssätze für die spätere Untersuchung dieser Moduln werden zur Verfügung gestellt. Eher kombinatorischer Natur sind die Aussagen in (3.3) und (3.4). Die Homologie induzierter Komplexe wird in (3.6) und (3.7) beschrieben.

In diesem Paragraphen sind stets $\Delta = (\Delta, I, f)$ ein gefärbter Komplex mit endlicher Farbenmenge $I = \{0,\ldots,\ell\}$ und K ein Hauptidealring.

(3.1) Sind e,e' Ecken von Δ, so definieren wir $e<e'$, falls $f(e)<f(e')$ in der natürlichen Anordnung von I ist. Seien $e_0<e_1<\ldots<e_k$ die Ecken von $s\in sx_k(\Delta)$ in dieser Ordnung. Wir sagen dann, e_i habe die i-te Position in s. Setze $C_k(\Delta,K) := $ freier K-Modul auf den K-Simplices von Δ.

Sei ferner $\partial_k : C_k(\Delta,K) \to C_{k-1}(\Delta,K)$ die K-lineare Fortsetzung der Abbildung

$$s \mapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i s^i,$$

wobei s^i die Seite von s ist, die durch Weglassen der Ecke von s in der i-ten Position (nach obiger Erklärung) entsteht. ∂_k ist ein K-Homomorphismus

mit der Eigenschaft $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ (Randoperator). Wir erhalten einen Kettenkomplex

$$C_k(\Delta,K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(\Delta,K) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots\cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Delta,K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \,.$$

für den wir abkürzend $(C(\Delta),K)$ schreiben. Die Gruppe

$$H_k(\Delta,K) := \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$$

heißt die k-te (orientierte) simpliziale Homologiegruppe von Δ mit Koeffizienten in K.

(3.2) Die Gruppe G operiere typerhaltend auf dem gefärbten Komplex Δ. Auf natürliche Weise wird dann $C_k(\Delta,K)$ zu einem KG-Modul. $C_k(\Delta,K)$ besitzt als KG-Modul eine "einfache" Struktur: Sei R_k ein Repräsentantensystem für die G-Bahnen auf den k-Simplices von Δ. Dann ist

$$C_k(\Delta,K) = \bigoplus_{s \in R_k} (K_{\mathrm{Stab}_G(s)})^G,$$

wobei $(K_{\mathrm{Stab}_G(s)})^G$ den nach G induzierten Modul des trivialen $K\mathrm{Stab}_G(s)$-Moduls K bezeichnet.

Der Randoperator ∂ des Kettenkomplexes $(C(\Delta),K)$ ist ein KG-Modulhomomorphismus. Infolgedessen sind die Homologiegruppen $H_k(\Delta,K)$, $k \geq 0$, ebenfalls KG-Moduln. Die Untersuchung der Homologiemoduln von Gruppenkomplexen ist Gegenstand dieser Arbeit.

(3.3) Um $\ker \partial_k$ etwas genauer zu beschreiben, führen wir einige Bezeichnungen ein.

$$I_k := \{J \subseteq I \mid |J| = k\} \text{ für alle } 1 \leq k \leq \ell+1. \ (I_{\ell+1} = I).$$

Zu $z \in C_k(\Delta,K)$, $z = \sum_{s \in sx_k(\Delta)} a_s s$, $a_s \in K$, definiere

$$Tr(z) := \{s \in sx_k(\Delta) \mid a_s \neq 0\} \text{ und}$$

$\Delta(z)$ = Teilkomplex von Δ, erzeugt von den Simplices in $Tr(z)$.

Sei $\emptyset \neq J \subseteq I$ und sei $s=(K,y) \in \Delta$. Wir sagen $s(J)$ (vgl.(2.5)) sei definiert, falls $J \subseteq f(s)$ ist. Wir setzen

$$\tilde{J} := \{s \in \Delta \mid s(J) \text{ ist definiert (vgl.(2.5)) u. } \dim s = |J|\},$$
$$\tilde{J}_+ := \{s \in \tilde{J} \mid s(J) \text{ erscheint mit Koeffizient } +1 \text{ in } \partial_{|J|}(s)\},$$
$$\tilde{J}_- := \{s \in \tilde{J} \mid s(J) \text{ erscheint mit Koeffizient } -1 \text{ in } \partial_{|J|}(s)\}.$$

Satz. Sei $z = \sum_{s \in sx_k(\Delta)} a_s s \in C_k(\Delta,K)$. Genau dann gilt $z \in \ker \partial_k$, wenn

$$\sum_{s \in \tilde{J}_+} a_s s(J) - \sum_{s \in \tilde{J}_-} a_s s(J) = 0$$

für alle $J \in I_k$ gilt, für die es $s \in Tr(z)$ gibt, so daß $s(J)$ definiert ist.

Beweis. Faßt man alle Simplices in $Tr(\partial_k(z))$ nach Typen geordnet zusammen, so gilt

$$\partial_k(z) = \sum_{J\in I_k} \Big(\sum_{s\in \tilde{J}_+} a_s s(J) - \sum_{s\in \tilde{J}_-} a_s s(J) \Big). \quad \square$$

Sei $I^i := I-\{i\}$ gesetzt. Es gilt $\tilde{I}^i_+ = \operatorname{cham} \Delta$, falls i gerade ist, und $\tilde{I}^i_- = \operatorname{cham} \Delta$, falls i ungerade ist.

Folgerung. $H_\ell(\Delta,K) = \{z \in C_\ell(\Delta,K) \mid \sum_{s\in Tr z} a_s s(I^i) = 0 \ \forall i \in I\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Satz (3.3) und der vorangehenden Bemerkung. $\square$

Die Aussage im Satz kann noch etwas verfeinert werden. Sei $t \in sx_k(\Delta)$, bezeichne $S := S(t,z) = \operatorname{stern}_{\Delta(z)} t = \{s \in \Delta(z) \mid t \text{ ist Seite von } s\}$ den Stern (Residuum) von t in $\Delta(z)$. Sei nun $z \in \ker \partial_k$ und $t = s(J)$ für ein festes $s \in Tr z$ und $J \subseteq I$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{s\in \tilde{J}_+ \\ s\in S}} a_s s(J) - \sum_{\substack{s\in \tilde{J}_- \\ s\in S}} a_s s(J) = 0.$$

(3.4) Sei nun $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex. Für eine Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ bezeichne R_J ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von G_J in G. Für $0 \le k \le \ell$ gilt dann:

$$sx_k(\Delta) = \{(J,x) \mid |J| = k+1 \text{ und } x \in R_J\}.$$

Folglich kann jedes Element $z \in C_k(\Delta,K)$ geschrieben

werden

$$z = \sum_{J\in I_{k+1}} \sum_{x\in R_J} a_x(J,x)$$

für geeignete $a_x \in K$. Die Folgerung aus Satz (3.3) lautet nun (k=ℓ):

$$H_\ell(\Delta,K) = \{z\in C_\ell(\Delta,K) \mid \sum_{x\in R_I} a_x(I^i,x) = 0 \text{ für alle } i\in I\}.$$

Wegen $\text{stern}_\Delta(I^i,x) = \{(I,y) \mid y\in G(i)x\}$ gilt sogar genauer:

$$H_\ell(\Delta,K) = \{z\in C_\ell(\Delta,K) \mid \sum_{x\in R_I\cap G(i)r} a_x = 0 \ \forall\ i\in I, r\in R_{Ii}\}.$$

(3.5) Seien (Δ_1,I,f_1) und (Δ_2,I,f_2) gefärbte Komplexe und sei $\varphi:\Delta_1 \to \Delta_2$ ein Isomorphismus gefärbter Komplexe. Dann induziert φ einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$\varphi : (\mathfrak{C}(\Delta_1),K) \to (\mathfrak{C}(\Delta_2),K)$$

und einen Isomorphismus der Homologiegruppen. Sind insbesondere $\Delta_1 = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ und $\Delta_2 = \Delta(G,(H_i)_{i\in I})$ konjugierte Komplexe, so sind die zugehörigen Homologiemoduln sogar als KG-Moduln isomorph (der Randoperator ist ein G-Homomorphismus).

(3.6) Die Homologie eines induzierten Gruppenkomplexes läßt sich direkt aus der Homologie des Ausgangskomplexes berechnen.

Satz. Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und sei $\bar{\Delta} = \Delta(H,(H_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex in H und sei $\Delta = \Delta(G,(H_i)_{i\in I})$ der induzierte Komplex. Es besteht eine Isomorphie

$$(\mathcal{C}(\Delta),K) \cong (\mathcal{C}(\bar{\Delta}),K)_H^G$$

von Kettenkomplexen und gradierten KG-Moduln.

Beweis. Sei $T = \{t_k \mid 1 \le k \le |G:H|\}$ ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenklassen von H in G. Ferner sei (J,x) ein k-Simplex von Δ, $x = \bar{x}t_k$ mit $\bar{x}\in H$ und $t_k \in T$. Die K-lineare Fortsetzung der Abbildung

$$(J,x) \mapsto (J,\bar{x})\otimes t_k \qquad (J\in I_{k+1},\ x\in G)$$

ist ein KG-Isomorphismus φ_k von $C_k(\Delta,K)$ auf $C_k(\bar{\Delta},K)_H^G$. Aus der Definition des Randoperators ∂ folgt sofort, daß ∂ mit $\varphi = (\varphi_k)$ vertauschbar ist. □

Folgerung. Seien die Bezeichnungen wie eben. Dann gilt

$$H_k(\Delta,K) \cong H_k(\bar{\Delta},K)_H^G \quad \text{(als KG-Moduln)}$$

$(0 \le k \le \ell)$.

Beweis. Bezeichnen wir mit ∂ den Randoperator von Δ und mit $\bar{\partial}$ denjenigen von $\bar{\Delta}$, so gilt aufgrund des vorangehenden Satzes

$$\ker \partial_k = (\ker \bar{\partial}_k)_H^G \quad \text{und} \quad \operatorname{im} \partial_{k+1} = (\operatorname{im} \bar{\partial}_{k+1})_H^G.$$

Wegen $\Delta = \dot{U}\bar{\Delta}t_k$ folgt die Behauptung. □

(3.7) Satz. Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex. Es existiere ein $k\in\mathbb{N}$ $(1 \le k \le \ell)$ derart, daß $G_J \le H$ für alle $J\in I_k$. Dann gilt für $r\ge k$ die Isomorphie von KG-Moduln:

$$H_r(\Delta,K) \cong H_r(\Delta(H,(G_i \cap H)_{i\in I}),K)_H^G.$$

Beweis. Setze $\tilde{\Delta} = \Delta(G,(G_i \cap H)_{i\in I})$ für den induzierten Komplex. Wegen Folgerung (3.6) gilt $H_i(\tilde{\Delta},K) \cong H_i(\Delta(H,(G_j \cap H)_{j\in I}),K)$ für $0 \le i \le \ell$. Nach Voraussetzung ist $G_J \le H$ für jede Teilmenge $J\subseteq I$ mit $|J| \ge k$. Folglich gilt $C_r(\tilde{\Delta},K) = C_r(\Delta,K)$ für alle $r \ge k-1$. □

(3.8) Wir beschließen den Paragraphen mit zwei einfachen Beispielen und einem wichtigen Hilfssatz.

Beispiel 1 (vgl. z.B. Biggs [5], S.25). Sei das 1-dimensionale Gerüst von $\Delta = (\Delta,I,f)$ (der

Graph von Δ) zusammenhängend. Dann ist $H_o(\Delta,K) \cong K$.

Beweis. $C_1(\Delta,K)$ ist der freie K-Modul erzeugt von den 1-Simplices von Δ. Ist s ein 1-Simplex, mit Ecken e_o,e_1, so ist $\partial_1(s) = e_1-e_o \in C_o(\Delta,K)$. Definieren wir die Augmentation $f:C_o(\Delta,K) \to K$ via $f(e) = 1$ für alle Ecken e von Δ.
Wir zeigen, daß im $\partial_1 = \ker f$. Da Δ zusammenhängend ist, existiert zu je zwei Ecken e,e' eine Folge von 1-Simplices $\{e,e_o\}, \{e_o,e_1\},\ldots,\{e_n,e'\}$ und es gilt

$$\partial_1(\{e,e_o\}+\sum_{i=o}^{n-1}\{e_i,e_{i+1}\}+\{e_n,e'\}) = e'-e.$$

Also ist im $\partial_1 = \ker f$ und damit gilt
$H_o(\Delta,K) = C_o(\Delta,K)/\text{im}\,\partial_1 = C_o(\Delta,K)/\ker f \cong K$. □

Ist $G \leq \text{Taut}\,\Delta$ (und Δ^1 zusammenhängend), so ist $H_o(\Delta,K) = K_G$ der triviale KG-Modul. Im allgemeinen ist $\text{rang}\, H_o(\Delta,K)$ gleich der Zahl der Zusammenhangskomponenten des 1-dimensionalen Gerüsts von Δ.

Beispiel 2. Ein simplizialer Komplex, der eine Ecke e^* besitzt derart, daß $s \cup \{e^*\}$ ein Simplex für jedes Simplex s des Komplexes ist, heißt sternförmig.

Sei $\Delta = (\Delta,I,f)$ ein sternförmiger gefärbter Komplex. Dann hat Δ triviale Homologie, d.h.

$$H_o(\Delta,K) \cong K \text{ und } H_k(\Delta,K) = 0 \text{ für alle } k \geq 1.$$

Beweis. Definiere $\psi_k: C_k(\Delta,K) \to C_{k+1}(\Delta,K)$ durch

$$\psi_k(s) = \begin{cases} s \cup e^*, \text{ falls } e^* \text{ keine Ecke von } s \text{ ist} \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei $s \in \Delta$ mit $\dim s = k$ gilt. Dann ist $\partial_{k+1} \circ \psi_k + \psi_{k-1} \circ \partial_k = id_{C_k(\Delta,K)}$. Für $k \geq 1$ und $z \in \ker \partial_k$ gilt folglich $z = \partial_{k+1}(\psi_k(z)) \in \operatorname{im} \partial_{k+1}$. Folglich ist $H_k(\Delta,K) = 0$ für alle $k \geq 1$. Da der Graph von Δ offensichtlich zusammenhängend ist, folgt der Rest der Behauptung aus Beispiel 1. □

Ist in einem Gruppenkomplex $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i \in I})$ mindestens einmal $G_i = G$, so ist Δ sternförmig.

Der folgende Hilfssatz wird bei der Berechnung der Homologie der Standardkomplexe von Coxetergruppen und Gruppen mit B,N-Paaren eine entscheidende Rolle spielen.

Lemma. Sei $\Delta = \Gamma \cup \Gamma'$ ein gefärbter Komplex, Γ, Γ' Teilkomplexe. Haben Γ und $\Gamma \cup \Gamma'$ triviale Homologie, so ist $H_k(\Delta,K) \cong H_k(\Gamma',K)$ für alle $k \geq 0$.

Beweis. $\Gamma, \Gamma', \Gamma \cup \Gamma'$ sind via Restriktion der Färbung von Δ gefärbte Komplexe. Die Kettenkomplexe $(\mathfrak{C}(\Gamma),K)$, $(\mathfrak{C}(\Gamma'),K)$ und $\mathfrak{C}(\Gamma \cap \Gamma'),K)$ können als Untergruppen von $(C(\Delta),K)$ aufgefaßt werden. Wir machen $(\mathfrak{C}(\Delta),K)/(\mathfrak{C}(\Gamma'),K)$ zu einem Kettenkomplex über

$$\partial(z + C_k(\Gamma,K)) := \partial(z) + C_{k-1}(\Gamma,K),$$

ebenso $(\mathcal{C}(\Gamma'),K)/(\mathcal{C}(\Gamma\cap\Gamma'),K)$. Dann gilt folgende Isomorphie von Kettenkomplexen (K fortgelassen):

$$\mathcal{C}(\Delta)/\mathcal{C}(\Gamma) \cong \mathcal{C}(\Gamma')/\mathcal{C}(\Gamma\cap\Gamma').$$

Schreiben wir $\mathcal{C}(\Delta,\Gamma)$ für $(\mathcal{C}(\Delta),K)/(\mathcal{C}(\Gamma),K)$ und $\mathcal{C}(\Gamma',\Gamma\cap\Gamma')$ für $(\mathcal{C}(\Gamma'),K)/(\mathcal{C}(\Gamma\cap\Gamma'),K)$, so erhalten wir das folgende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}(\Gamma\cap\Gamma') & \rightarrowtail & \mathcal{C}(\Gamma') & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}(\Gamma',\Gamma\cap\Gamma') \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathcal{C}(\Gamma) & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\Delta) & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}(\Delta,\Gamma) \end{array} .$$

Hierauf die lange exakte Homologiesequenz angewendet ergibt die Behauptung. □

§4 Zusammenhängende Gruppenkomplexe

Sei G eine Gruppe, $I = \{0,\dots,\ell\} \subseteq \mathbb{N}$ und sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex in G mit der kanonischen Färbung $f:\Delta \to \mathbb{P}(I)$, $f((J,x)) = J$ für alle $J \subseteq I$, $x \in G$.

(4.1) Wir beginnen mit einer Reihe von Definitionen. Für $k=1,\dots,\ell$ heißen zwei k-Simplices s,t von Δ benachbart (vom Typ J), falls ein (k-1)-Simplex u von Δ existiert, das Seite von s und von t ist (mit $f(u) = J$). s und t heißen verbunden, wenn es eine Folge $s = s_0, s_1, \dots, s_n = t$ von k-Simplices gibt, derartig daß s_i und s_{i+1} benachbart sind für $i = 0,\dots,n-1$. Für ein festes k-Simplex s heißt die Menge $\{t \in sx_k(\Delta) \mid t \text{ verbunden mit } s\}$ die Zusammenhangskomponente von s in Δ. Δ heißt k-zusammenhängend ($k \geq 1$), falls alle k-Simplices von Δ eine Zusammenhangskomponente bilden. Offenbar ist Δ 1-zusammenhängend genau dann, wenn das 1-dimensionale Gerüst von Δ als Graph zusammenhängend ist.

Lemma. (a) Seien $J \neq M$ nichtleere Teilmengen von I mit $|J| = k+1 = |M|$ und seien $x,y \in G$. Genau dann sind (J,x) und (M,y) benachbart in Δ, wenn $|J \cap M| = k$ und $xy^{-1} \in G_{J\cap M}$ gilt.

(b) Die Fundamentalsimplices der Dimension k liegen in einer Zusammenhangskomponente.

Beweis. (a) Ist (J,x) benachbart zu (M,y), so existiert ein $(L,z)\in sx_{k-1}(\Delta)$ mit $(L,z)=(J,x)\cap(M,y)$. Da (J,x) und (M,y) k-Simplices sind, folgt $L = J\cap M$ und $xz^{-1}\in G_L$, $xy^{-1}\in G_L$. Also ist $L=J\cap M$ und $xy^{-1}\in G_L$. Die Umkehrung ist klar.

(b) Die k-ten Fundamentalsimplices $(J,1)$ und $(M,1)$ sind nach (a) genau dann benachbart, wenn $|J\cap M|= k$ ist. Es ist leicht eine Folge $J=J_0,J_1,\ldots,J_n=M$ von (k+1)-elementigen Teilmengen von E derart zu finden, daß $J_i\cap J_{i+1} = k$ für $0 \le i \le n-1$ ist. □

Aufgrund des vorangehenden Lemmas definieren wir die k-te Fundamentalzusammenhangskomponente $Z_k(\Delta):=\{s\in sx_k(\Delta)|s$ ist verbunden mit einem Fundamentalsimplex$\}$. Wegen der Wirkung von G durch Rechtsmultiplikation auf Δ, sind die Zusammenhangskomponenten in jeder Dimension $1 \le k \le \ell$ Bilder der Fundamentalzusammenkomponenten: Jede Zusammenhangskomponente von k-Simplices hat die Gestalt $Z_k(\Delta)g =\{sg|s\in Z_k(\Delta)\}$ für ein geeignetes $g\in G$.

(4.2) Die Zusammenhangskomponenten von Δ lassen sich in jeder Dimension genau beschreiben:

Satz. Sei $1 \le k \le \ell$ und $J\subseteq I$ mit $|J|= k+1$. Für $x\in G$ liegt (J,x) in $Z_k(\Delta)$ genau dann, wenn $x\in<G_K|K\subseteq I$ mit $|K|= k>=:F_k(\Delta)$.

Beweis. Sei zunächst (J,x) ein Element der Fundamentalzusammenhangskomponente $Z_k = Z_k(\Delta)$.

Wegen Lemma (4.1)(b) ist (J,x) mit jedem Fundamentalsimplex in Z_k verbunden, insbesondere mit $(J,1)$. Sei nun

$$(J,1)=(J_o,g_o),(J_1,g_1),\ldots,(J_n,g_n)=(J,x)$$

eine kürzeste Folge von k- Simplices, die $(J,1)$ und (J,x) verbindet, d.h. (J_i,g_i) ist benachbart zu (J_{i+1},g_{i+1}) für $0 \le i \le n-1$. Nach Lemma (4.1)(a) gilt $xg_{n-1}^{-1} \in F_k(\Delta)$ und induktiv können wir annehmen $g_{n-1}^{-1} \in F_k(\Delta)$. Damit gilt $x \in F_k(\Delta)$.

Sei nun umgekehrt $x \in F_k(\Delta)$, etwa $x=g_n \cdot \ldots \cdot g_1$ mit $g_i \in G_{J_i}$ für geeignete $J_i \subseteq I$ und $|J_i|=k$. Sei $n = 1$, also $x = g_1$ mit $g_1 \in G_{J_1}$. (J,x) ist verbunden mit (K_1,x) für jede Teilmenge $K_1 \subseteq I$ mit $|K_1| = k+1$, insbesondere für $K_1 = J_1$ (G operiert transitiv auf der Menge der Zusammenhangskomponenten von x-Simplices). (K_1,x) ist benachbart zu $(K_1,1)$, da beide die Seite $(J_1,x)=(J_1,1)$ gemeinsam haben. Damit ist (J,x) mit einem Fundamentalsimplex verbunden, liegt also in Z_k. Sei nun $n > 1$. (J,x) ist verbunden mit (K_n,x) für jede Teilmenge $K_n \subseteq J_n$ mit $|K_n| = k+1$. (K_n,x) ist benachbart zu $(K_n,g_{n-1}\cdots g_1)$ über die gemeinsame Seite $(J_n,x) = (J_n,g_{n-1}\cdots g_1)$. Die Behauptung folgt induktiv. □

Folgerung. (a) Sei $1 \leq k \leq \ell$. $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ist genau dann k-zusammenhängend, wenn $G = \langle G_K | K\subseteq I \text{ mit } |K|=k\rangle$. Insbesondere ist das 1-dimensionale Gerüst von Δ (der Graph von Δ) genau dann zusammenhängend, wenn $G = \langle G_i | i\in I\rangle$ gilt.

(b) Ist Δ k-zusammenhängend, so ist Δ auch p-zusammenhängend für jede natürliche Zahl $1 \leq p \leq k$.

Ist $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex mit $G = \langle G(i) | i\in I\rangle$, so heißt Δ ein Kammerkomplex (vgl. Tits [34], S.3). Δ ist also gerade dann ein Gruppenkammerkomplex, wenn alle Kammern miteinander verbindbar sind.

(4.3) Sei weiter $\Delta = \Delta(G,G_i)_{i\in I})$ ein endlicher Gruppenkomplex, d.h. $|G:G_I|<\infty$, und sei $Z_k(\Delta)$ die k-te Fundamentalzusammen hangskomponente von Δ. Sei $\tilde{\Delta}$ der von $Z_k(\Delta)$ erzeugte Teilkomplex von Δ und sei $F = F_k(\Delta) := \langle G_K | K\subseteq I,\ |K|=k\rangle$.

Satz. (a) $\tilde{\Delta}$ ist als F-Komplex isomorph zum k-dimensionalen Gerüst von $\bar{\Delta} = \Delta(F,(F\cap G_i)_{i\in I})$.

(b) Für jede natürliche Zahl r, $k \leq r \leq \ell$. gilt folgende Isomorphie von KG-Moduln (K Hauptidealring):

$$H_r(\Delta,K) \cong H_r(\bar{\Delta},K)_{|}{}^{G}.$$

Beweis. (a) Nach Satz (4.2) ist F gerade der Stabilisator von $\tilde{\Delta}$ in G (bzgl. der Wirkung durch Rechtsmultiplikation). Sei $\emptyset \neq J \subseteq I$ mit $|J| \leq k$. Genau dann ist (J,x) ein Simplex von $\tilde{\Delta}$, wenn $x \in F$ gilt. Die Tupel (J,x) und (K,y) bezeichnen dasselbe Simplex von $\tilde{\Delta}$ genau dann, wenn $J=K$ und $xy^{-1} \in G_J \cap F$ gilt. Folglich gilt (a).

(b) Dies ist Satz (3.7) für $H = F$. □

Man beachte jedoch, daß im allgemeinen Δ nicht isomorph zum von $\bar{\Delta}$ nach G induzierten Komplex $\Delta(G,(G_i \cap F)_{i \in I})$ ist.

Sei k die kleinste natürliche Zahl, für die Δ nicht k-zusammenhängend ist. Der vorangehende Satz zeigt, daß es zu jedem $r \in \mathbb{N}$, $k \leq r \leq \ell$, einen r-zusammenhängenden Gruppenkomplex gibt, aus dessen Homologie sich $H_r(\Delta,K)$ berechnen läßt. Insbesondere kann man bei der Untersuchung der "Tophomologie" $H_\ell(\Delta,K)$ induktiv voraussetzen, daß Δ ein Gruppenkammerkomplex ist.

Satz (4.3) liefert ein homologisches Kriterium für die "Zusammenhangsstruktur" von Δ.

Folgerung. Sei rang $H_r(\Delta,K) \neq 0$ für ein $r \geq 1$ teilerfremd zu $|G|$. Dann ist Δ r-zusammenhängend.

Beweis. Wäre Δ nicht r-zusammenhängend, so wäre $\Gamma = \Gamma_r(\Delta) = \{G_K \mid K \simeq I, |K| = r\} \neq G$. Nach dem vorangehenden Satz wäre dann jedoch rang $H_r(\Delta,K)$ = rang $H_r(\bar{\Delta},K)_\Gamma{}^G$ $= |G:F|$ rang $H_r(\bar{\Delta},K)$ nicht zu $|G|$ teilerfremd. □

Insbesondere ist also Δ ein Gruppenkammerkomplex falls $\text{rang}_K H_\ell(\Delta,K) = 1$ gilt. Auf Gruppenkomplexe mit 1-dimensionaler Tophomologie gehen wir später noch ausführlicher ein (vgl. §8).

Das Beispiel $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i=o,1})$ mit $G = \text{Sym}(3)$ $G_o = \text{Alt}(3)$ und G_1 eine Untergruppe der Ordnung 2 zeigt, daß im allgemeinen rang $H_\ell(\Delta,K)$ auch für Gruppenkammerkomplexe nicht zu $|G|$ teilerfremd ist.

§ 5 Der Lefschetzcharakter

Der Lefschetzcharakter ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung der Homologiemoduln simplizialer Komplexe. Sei in diesem Paragraphen stets G eine endliche Gruppe und $\Delta=(\Delta,I,f)$ ein gefärbter G-Komplex (mit $I=\{0,\ldots,\ell\}$ und $G\leq \mathrm{Taut}\,\Delta$) und sei $\mathcal{C}(\Delta):=\mathcal{C}(\Delta,K)$, K Hauptidealring, der zugehörige Kettenkomplex (vgl. (4.1)) mit Homologie $H(\Delta):=H(\Delta,K)$.

(5.1) Definition (vgl. z.B. Spanier [24] S. 194).

(a) Der virtuelle Charakter

$$\lambda_{\Delta,K}:=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k \mathrm{ch}(H_k(\Delta))$$

heißt der Lefschetzcharakter von G auf Δ mit Koeffizienten in K. Dabei ist die Abbildung $\mathrm{ch}(V)\colon G\to K$, V ein endlich erzeugter KG-Modul, definiert durch:

$\mathrm{ch}(V)(g):=$ Spur des von g auf dem K-freien Modul V/Tor V induzierten Automorphismus.

(b) Die Eulercharakteristik von Δ mit Koeffizienten in K ist definiert durch

$$\chi(\Delta,K):=\lambda_{\Delta,K}(1)=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k \,\mathrm{rang}\, H_k(\Delta)$$

(5.2) Die Anwendbarkeit des Lefschetzcharakters hängt entscheidend von dem folgenden Satz von Hopf und Lefschetz (Spurformel) ab (vgl. z.B. Spanier [24], S. 195).

Satz. Mit den Bezeichnungen von (5.1) gilt

$$\lambda_{\Delta,K} = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \, ch(C_k(\Delta)).$$

Beweis. Wir setzen $Z_k := \ker \partial_k$ und $B_k := \operatorname{im} \partial_{k+1}$, d.h. $H_k(\Delta) = Z_k/B_k$ für $k=0,\ldots,\ell$. Z_k und B_k sind G-invariante Teilmoduln von $C_k(\Delta)$. Da K ein Hauptidealring ist, gilt für jedes $g \in G$ und $0 \le k \le \ell$ (mit $B_{-1}=0$):

$$\begin{aligned} & ch(C_k(\Delta))(g) \\ &= ch(C_k(\Delta)/Z_k)(g) + ch(H_k(\Delta))(g) + Ch(B_k)(g) \\ &= ch(B_{k-1})(g) + ch(H_k(\Delta))(g) + ch(B_k)(g) \end{aligned}$$

Folglich gilt: $\sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \, ch(C_k(\Delta))(g)$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \, ch(B_{k-1})(g) + ch(H_k(\Delta)(g) + ch(B_k)(g)$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k ch(H_k(\Delta))(g) = \lambda_{\Delta,K}(g). \quad \square$$

(5.3) Sei nun R_k ein Repräsentantensystem der Bahnen von G auf den k-Simplices von Δ, $0 \le k \le \ell$. Nach (3.2) läßt sich $C_k(\Delta,K)$ als direkte Summe von Permutationsmoduln von G schreiben. Infolgedessen

gilt

$$\lambda_{\Delta,K} = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \Big(\sum_{s \in R_k} \mathrm{ch}((K_{\mathrm{Stab}_G(s)})^G \Big).$$

Bezeichnen wir für $g \in G$ mit Δ_g den Teilkomplex von Δ, der aus den unter g festbleibenden Simplices besteht und setzen wir $G_s := \mathrm{Stab}_G(s)$, so ist

$$\mathrm{ch}((K_{G_s})^G)(g) = \text{Zahl der unter g in der Bahn von s festen Simplices.}$$

Also gilt für festes $k \in \{0,..,\ell\}$

$$\sum_{s \in R_k} \mathrm{ch}((K_{G_s})^G)(g) = \mathrm{rang}\, C_k(\Delta_g, K),$$

d.h. $\chi_{\Delta,K}(g) = \chi(\Delta_g, K)$. Ist nun insbesondere $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i \in I})$ ein Gruppenkomplex, so bilden die Simplices $(J,1)$, $\emptyset \neq J \subseteq I$, ein Repräsentantensystem der Bahnen von G auf Δ, und der Lefschetzcharakter läßt sich wie folgt beschreiben

$$\lambda_{\Delta,K} = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq I} (-1)^{|J|-1} \mathrm{ch}((K_{G_J})^G).$$

Für die Eulercharakteristik gilt dann

$$\chi(\Delta,K) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq I} (-1)^{|J|-1} |G:G_J|.$$

Für zusammenhängende Gruppengraphen ergibt sich damit leicht die (auch für beliebige Graphen gültige) Formel

$$\text{rang } H_1(\Delta,K) = \#\text{Kanten} - \#\text{Ecken} + 1$$
$$= |G:G_o \cap G_1| - |G:G_o| - |G:G_1| + 1.$$

Einen direkten Beweis dieser Gleichung und eine Interpretation von $H_1(\Delta,K)$ findet man in Biggs [5], S. 25. Offensichtlich ist also für einen endlichen Gruppengraphen stets $\text{rang } H_1(\Delta,K) \geq 1$. Für mindestens 2-dimensionale Gruppenkomplexe jedoch können die Homologiegruppen $H_k(\Delta,K)$ für $k \geq 1$ vollständig verschwinden. Ein erstes Beispiel werden wir im folgenden Paragraphen kennenlernen ((6.4), Komplex F).

(5.4) Im allgemeinen ist es sehr schwierig, aus der Eulercharakteristik Rückschlüsse auf die Struktur eines Gruppenkomplexes und seiner Homologiemoduln zu ziehen. Bei 1-dimensionalen Gruppenkomplexen (Gruppengraphen) ist dies eher möglich. Wie wir in (5.3) gesehen haben, ist für einen endlichen Gruppengraphen $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i=o,1})$ die Eulercharakteristik $\chi(\Delta,K) \leq 0$. Sei im folgenden $K=\mathbb{Q}$, $\chi(\Delta) := \chi(\Delta,\mathbb{Q})$.

Beispiel. Sei $\chi(\Delta) = -1$. Dann ist $G = \langle G_o, G_1 \rangle$ und es tritt einer der folgenden Fälle ein

(i) $G_I \lhd G$ und $G/G_I \cong \text{Sym}(3)$, $|G_o/G_I| = 2$, $|G_1/G_I| = 3$; $H_1(\Delta)$ ist der irreduzible, 2-dimensionale Modul für G/G_I.

(ii) $G_I \lhd G$ und $G/G_I \cong Z_6$, $|G_o/G_I| = 2$, $|G_1/G_I| = 3$; $H_1(\Delta)$ ist der irreduzible, 2-dimensionale Modul für G/G_I, der über $\mathbb{C}$ in die beiden,

durch primitive 6-te Einheitswurzeln erzeugten 1-dimensionalen Moduln zerfällt.

(iii) $G/\bigcap_{x\in G} G_I^x \cong D_{12}$, $G_o/\bigcap_{x\in G} G_I^x \cong \mathrm{Sym}(3)$, $G_1/\bigcap_{x\in G} G_I^x \cong Z_2\times Z_2$; ist Z das Urbild von $Z(G/\bigcap_{x\in G} G_I^x)$ in G, so ist $H_1(\Delta)$ der irreduzible 2-dimensionale Modul von $G/\bigcap_{x\in G} G_I^x$, auf dem $Z/\bigcap_{x\in G} G_I^x$ nichttrivial operiert.

Beweis. $\chi(\Delta)=-1$ genau dann, wenn $1=|G:G_I|-(|G:G_o|+|G:G_1|)$ ist. Setze $x=|G:G_I|$, $a=|G:G_o|$ und $b=|G:G_1|$. Dann gilt für die natürlichen Zahlen a, b und x:

$$x-1=a+b,\ a,b\le x/2 \text{ und } a,b\mid x.$$

1. Fall: $x\equiv 1 \pmod 2$. Dann ist $a=(x-1)/2=b$. Wegen $a\mid x$ existiert eine natürliche Zahl $0\neq k\in\mathbb{N}$ mit $ka=x$, d.h. $k(x-1)/2=x$. Folglich ist $k=2x/x-1$ und es ergibt sich wegen $k\le x$ und der Monotonie der Funktion $f(x)=2x/x-1$ im Bereich $x>1$: $k=3=x$. Das führt zu dem Widerspruch $G_o=G=G_1$ (aber $|G:G_I|=3$).

2. Fall: $x\equiv 0 \pmod 2$. Dann ist o.B.d.A. $a=x/2$ und $b=x/2-1$. Wegen $b\mid x$ existiert eine natürliche Zahl $0\neq n\in\mathbb{N}$ mit $kb=k(x-2)/2=x$. Folglich ist $k=2x/x-2$ und es ergeben sich die Lösungstupel $(k,x)=(4,4)$ und $(3,6)$. Wäre $k=4=x$, so wäre $G_1=G$ und $G_I=G_o$, ein Widerspruch zu $a=2$, $x=4$.

Also gilt $|G:G_I|=6$, $|G:G_o|=3$, $|G:G_1|=2$, d.h. Δ ist der bipartite Graph $K_{2,3}$. Insbesondere ist Δ zu-

sammenhängend und somit $G=\langle G_o, G_1\rangle$ (vgl. (4.2)). Setzen wir $K=\bigcap_{x\in G} G_I^x$, so ist G/K isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}\Delta\cong \mathrm{Sym}(3)\times Z_2\cong D_{12}$. Ist $K=G_I$, so ist $G/K\cong \mathrm{Sym}(3)$ oder $G/K\cong Z_6$ und die Fälle (i) und (ii) ergeben sich mit Hilfe der Spurformel von Hopf-Lefschetz. Ist $K\neq G_I$, so ist $G/K\cong D_{12}$ und $G_o/K\cong \mathrm{Sym}(3)$, $G_1/K\cong Z_2\times Z_2$ und (iii) ergibt sich ebenfalls aus der Spurformel. □

Es ist klar, daß man mit dem gleichen Verfahren wie im vorangehenden Beweis auch für andere Werte als $\chi(\Delta)=-1$ nur endlich viele Lösungstupel für (x,a,b) bekommt. Die Bestimmung der Gruppen mit geeigneten Untergruppenpaaren wird jedoch schnell sehr schwierig. Leicht lösbar ist der Fall $\chi(\Delta)=0$, der auf Standardkomplexe von Diedergruppen führt.

(5.5) Besonders erfolgreich kann mit dem Lefschetzcharakter gearbeitet werden, wenn nur wenige Homologiemoduln nicht verschwinden, d.h. wenn Δ "niedrige" Dimension besitzt und "fast alle" Homologiemoduln verschwinden. Im folgenden Paragraphen wird dies anhand der 2-dimensionalen Gruppenkomplexe in Sym(4) veranschaulicht werden (vgl. auch (12.6), Berechnung des Charakters des Steinbergmoduls einer Gruppe mit (B,N)-Paar).

In (3.8) wurde gezeigt, daß $H_o(\Delta, K)$ stets der

triviale Modul ist, wenn das 1-dimensionale Gerüst von Δ ein zusammenhängender Graph ist. Für den Fall, daß nur ein weiterer Homologiemodul von Δ nicht verschwindet, geben wir eine kleine Anwendung der Spurformel.

Lemma. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein zusammenhängender Gruppenkomplex und sei K ein Körper. Ist $H_k(\Delta,K) \neq 0$ für ein $k\in\{1,\dots,\ell\}$, aber $H_i(\Delta,K) = 0$ für $k\neq i\in\{1,\dots,\ell\}$, so ist der triviale Modul kein Konstituent von $H_k(\Delta,K)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von (5.3) gilt (K bezeichne den trivialen Modul)

$$\lambda_{\Delta,K} = \mathrm{ch}(K) + (-1)^k \mathrm{ch}(H_k(\Delta,K)) = \sum_{\emptyset\neq J\subsetneq I} (-1)^i \,\mathrm{ch}((K_{G_J})^G).$$

Sei $\mathbb{1}=\mathbb{1}_G$ der 1-Charakter von G und $m\geq 0$ die Vielfachheit von $\mathbb{1}$ in $\mathrm{ch}(H_k(\Delta,K))$. Aufgrund der Frobeniusreziprozität kommt $\mathbb{1}$ genau einmal in $\mathrm{ch}((K_{G_J})^G)$ vor für jede nichtleere Teilmenge J von I. Folglich erhalten wir

$$\mathbb{1} + (-1)^k m\mathbb{1} = \sum_{j=1}^{\ell+1} (-1)^{j-1} \binom{\ell+1}{j} \mathbb{1} = \mathbb{1}. \square$$

§6 Die stabilen Gruppenkammerkomplexe in der symmetrischen Gruppe Sym(4)

In diesem Paragraphen wollen wir alle stabilen (vgl. (2.2)) Gruppenkammerkomplexe in Sym(4) bestimmen und ihre Homologie (mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$) berechnen. Stets gilt in diesem Paragraphen $G = \mathrm{Sym}(4)$ auf der Menge $\{a,b,c,d\}$. Wir schreiben $H_k(\Delta)$ für $H_k(\Delta,\mathbb{Q})$.

(6.1) Zunächst führen wir einige Bezeichnungen für die Untergruppen von G ein. Die drei 2-Sylowgruppen von G sind isomorph zur Diedergruppe D_8 und werden mit D_i, $i = 1,2,3$, bezeichnet, dabei sei D_1 diejenige Gruppe, deren nichttriviales Zentrumselement die Zykelzerlegung $(a,b)(c,d)$ besitzt , $D_2 \leftrightarrow (a,d)(b,c)$ $D_3 \leftrightarrow (a,c)(b,d)$. Die Punktstabilisatoren $G_a,\ldots,G_d$ sind isomorph zur Sym(3) und die Normalisatoren der 3-Sylowgruppen $T_a,\ldots,T_d$. G besitzt die beiden Normalteiler $A_4 := \mathrm{Alt}(4)$ und die Kleinsche Vierergruppe V. Jede 2-Sylowgruppe D_i besitzt eine zyklische Untergruppe Z_{4i} der Ordnung 4 und eine nichtzyklische Untergruppe V_i der Ordnung 4 verschieden von V. Die Untergruppen der Ordnung 2 erhalten folgende Bezeichnungen: $Z_{ab} := G_a \cap G_b$ u.s.w., bzw. $Z_{(ab)(cd)}$ u.s.w. für die Untergruppen der Ordnung 2 von V.

(6.2) Nach Satz (4.2) ist $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i=o,1})$ ein Kammerkomplex genau dann, wenn $G = \langle G_o, G_1 \rangle$ gilt. Da Δ auch stabil sein soll, gilt $G_o \neq G \neq G_1$ und $G_o \neq G_1$. Folgende Paare von Untergruppen erfüllen diese Bedingungen:

$\{G_o,G_1\} =$ 1.$\{A_4,D_1\}$, 2.$\{A_4,G_a\}$,.3.$\{A_4,V_1\}$,
4.$\{A_4,Z_{41}\}$, 5.$\{A_4,Z_{ab}\}$, 6.$\{D_1,D_2\}$,
7.$\{D_1,G_a\}$, 8.$\{D_1,Z_{42}\}$, 9.$\{D_1,V_2\}$,
10.$\{D_1,T_a\}$,11.$\{D_1,Z_{ad}\}$,12.$\{G_a,G_b\}$,
13.$\{G_a,V\}$,14.$\{G_a,Z_{41}\}$,15.$\{G_a,Z_{bc}\}$,
16.$\{Z_{41},Z_{42}\}$,17.$\{Z_{41},Z_{ab}\}$,18.$\{T_a,Z_{cd}\}$.

Die Graphen werden entsprechend den Nummern bezeichnet: (1)= $\Delta(G,(A_4,D_1))$, (2)= $\Delta(G,(A_4,G_a))$ u.s.w.. Jeder Gruppengraph ist bipartit mit Eckenmenge $E_o=\{G_o x | x \in G\}$ und $E_1=\{G_1 x | x \in G\}$. Jede Ecke aus E_o ist mit $|G_o:G_o \cap G_1|$ Ecken aus E_1 und jede Ecke aus E_1 ist mit $|G_1:G_o \cap G_1|$ Ecken aus E_o verbunden. Ist $|E_o|= n$ und $|E_1|= m$, so bezeichne $K_{n,m}$ den vollständigen bipartiten Graph auf den beiden Eckenmengen. Es gelten folgende Isomorphien von Graphen:

$(1) \cong K_{2,3}$, $(2) \cong K_{2,4}$, $(3) \cong K_{2,6}$, $(4) \cong K_{2,6}$,
$(5) \cong K_{2,12}$ $(7) \cong K_{3,4}$, $(10) \cong K_{3,8}$, $(13) \cong K_{4,6}$,
$(14) \cong K_{4,6}$.

Die übrigen Graphen lassen

sich ebenfalls leicht bestimmen. G operiert nur auf den Graphen (1) und (6) nicht treu. Da (8)≅(9) gilt, gibt es folglich 13 bipartite Graphen, auf denen G = Sym(4) als kantentransitive Untergruppe der typerhaltenden Automorphismengruppe wirkt.

Nach Satz (5.2) ergibt sich folgende Tabelle für dim $H_1(\Delta)$:

Komplex	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
dim $H_1(\Delta)$	2	3	5	5	11	1	6	4	4	14
Komplex	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)		
dim $H_1(\Delta)$	10	5	15	15	9	13	7	5		

Tabelle 1

Mit Hilfe der an den Beweis von Lemma (1.3) anschließenden Bemerkung kann ohne großen Aufwand nachgeprüft werden,daß die Liste der stabilen 1-dimensionalen Gruppenkammerkomplexe in G (bis auf Konjugation) vollständig ist.

(6.3) In der folgenden Tabelle geben wir einige 2-dimensionale stabile Gruppenkammerkomplexe in G an. Mit Satz (5.2) läßt sich dann leicht $\dim_{\mathbb{Q}} H_2(\Delta) - \dim_{\mathbb{Q}} H_1(\Delta)$ berechnen.

Bez.	(G_o,G_1,G_2)	$\{G(2),G(1),G(0)\}$	$\dim H_2(\Delta)$ $-\dim H_1(\Delta)$
A	A_4,D_1,G_d	V, T_d, Z_{cd}	6
B	A_4,G_d,G_c	T_d, T_c, Z_{cd}	5
C	A_4,G_d,V_1	$T_d,Z_{(ab)(cd)},Z_{cd}$	3
D	D_1,D_2,G_d	V, Z_{cd}, Z_{ad}	3
E	D_1,G_d,G_a	Z_{cd}, Z_{ab}, Z_{ad}	-2
F	D_1,G_d,V_2	$Z_{cd},Z_{(ab)(cd)},Z_{ad}$	0
G	G_a,G_b,G_c	Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{bc}	-1
H	G_a,G_c,V_1	Z_{ac}, Z_{ab}, Z_{cd}	1

Tabelle 2

Satz. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i=o,1,2})$ ein stabiler Gruppenkammerkomplex der Dimension 2 in G. Dann ist Δ bis auf Konjugation in G einer der in der Tabelle 2 aufgeführten Komplexe mit den Bezeichnungen A - H.

Beweis. Da Δ stabil ist, ist $G_j \varepsilon \{A_4;V;G_x,x=a,b,c;D_i;V_i,Z_{4i},i=1,2,3\}$ für j = 0,1,2. Sei $G_o = A_4$. Ist G_1 eine Diedergruppe, z.B. D_1, so kann G_2 keine weitere Diedergruppe sein (sonst wäre G(1)=G(2)). Ebenso scheiden V_i und Z_{4i} für i = 2,3 aus (G(1)=G(0)). Folglich ist $G_2 \varepsilon \{G_x, x = a,b,c,d\}$. Ist G_1 ein Punktstabilisator, z.B. G_d, so ist $G_2 \varepsilon \{G_x, x = a,b,c; D_i, V_i, i = 1,2,3\}$. Dies liefert zusätzlich die Komplexe B und C. Sei nun kein $G_i = A_4$ und sei $G_o = D_1$. Ist G_1 eine Diedergruppe, z.B. D_2, so ist

$G_2 \varepsilon \{G_x, x=a,b,c,d;\ V_3;\ Z_{43}\}$. Wegen $D_1 \cap V_3 = D_2 \cap V_3 = D_1 \cap Z_{43} = D_2 \cap Z_{43}$ erhalten wir Beispiel D. Ist $G_1 = G_d$, so folgt $G_2 \varepsilon \{G_x, x=a,b;\ Z_{4i}, i=1,2,3\}$. Dies ergibt die Beispiele E und F. Sei weiter $G_o = G_a$ und kein G_i eine Diedergruppe, bzw. A_4. Ist $G_1 = G_c$ so ist $G_2 \varepsilon \{G_x, x=b,d\ ; Z_{4i}, V_i, i=1,2,3\}$. Wegen $Z_{4i} \cap G_a = Z_{4i} \cap G_o = 1$ für alle i=1,2,3, scheidet Z_{4i} als Kandidat für G_2 aus und wir erhalten die Beispiele G und H. Ist $|G_i| = 4$ für i=1,2,3, so ist $\langle G(i) | i=0,1,2 \rangle < G$ und somit $\Delta(G, (G_i)_{i=1,2,3})$ kein Kammerkomplex nach Satz (4.2). Aus der Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Lemma (1.3) folgt, daß die Beispielkomplexe A bis H ein Vertretersystem für die Konjugiertenklassen von stabilen 2-dimensionalen Gruppenkammerkomplexen in G sind. □

Aus dem Beweis des vorangehenden Satzes ersieht man, daß jeder stabile 2-dimensionale Gruppenkomplex in G ein Gruppenkammerkomplex ist.

(6.4) Um die Dimension der Homologiegruppen der Beispielkomplexe A bis H genau zu berechnen, genügt es jeweils die Dimension der zweiten Homologiegruppen zu bestimmen (dim $H_o(\Delta) = 1$ in jedem Fall nach (3.8), Beispiel 1). Dies ist aber gerade der Kern des Randoperators ∂_2 auf $C_2(\Delta)$. Die Kammern sind auf allen acht Komplexen identifizierbar mit den Elementen von G. Sie bilden eine Q-Basis von $C_2(\Delta)$. Um die Schreibweise in den wei-

teren Betrachtungen zu vereinfachen, numerieren wir die Elemente von G durch:

Nr.	0	1	2	3	4
Elt.v. G:	1	(ab)(cd)	(ac)(bd)	(ad)(bc)	(ab)

Nr.	5	6	7	8	9	10
Elt.v. G:	(ac)	(ad)	(bc)	(bd)	(cd)	(abc)

Nr.	11	12	13	14	15	16
Elt.v. G:	(acb)	(abd)	(adb)	(acd)	(adc)	(bcd)

Nr.	17	18	19	20	21
Elt.v. G:	(bdc)	(abcd)	(adcb)	(acdb)	(abdc)

Nr	22	23
Elt.v. G:	(adbc)	(acbd)

Tabelle 3

Da die Komplexe 𝔸 bis 𝔾 sämtlich stabil sind, können wir die Simplices mit den Restklassen nach den Stabilisatoren der Fundamentalsimplices identifizieren (vgl. (2.2)). Der Randoperator ∂_2 kann also berechnet werden, wenn wir wissen, wie die Seiten der Codimension 1 = Restklassen nach G(i), i=0,1,2, für jede Kammer aussehen. Im folgenden stellen wir für die Komplexe 𝔸 bis 𝔻 eine Tabelle der Kammern mit ihren Seiten der Dimension 1 auf und lesen aus ihnen die Dimensionen der Homologie-

gruppen ab. Mit den Komplexen E bis H können wir summarisch verfahren.

A: Wir bezeichnen die Nebenklassen von $G_2 = V$ mit $x_0,\ldots,x_5$, diejenigen von $G(1) = T_d$ mit $y_0,\ldots,y_7$ und diejenigen von $G(2) = Z_{cd}$ mit $z_0,\ldots,z_{11}$.

Kammer :	0	1	2	3	4	5	6	7
Seiten der	x_0	x_0	x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_3
Dimension 1:	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_4	y_5	y_4
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_0	z_4	z_5	z_6
Kammer :	8	9	10	11	12	13	14	15
Seiten der	x_2	x_1	x_4	x_5	x_5	x_4	x_4	x_5
Dimension 1:	y_6	y_7	y_0	y_0	y_3	y_2	y_3	y_1
	z_7	z_1	z_4	z_6	z_5	z_7	z_8	z_9
Kammer :	16	17	18	19	20	21	22	23
Seiten der	x_5	x_4	x_2	x_2	x_3	x_3	x_1	x_1
Dimension 1:	y_2	y_1	y_5	y_7	y_6	y_7	y_6	y_5
	z_{10}	z_{11}	z_8	z_{11}	z_{10}	z_9	z_2	z_3.

Tabelle A

Aus der Tabelle liest man unmittelbar ab, daß $\{\partial_2(k) \mid k=0,\ldots 11,13,\ldots,17\}$ linear unabhängig in $C_1(A)$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß auch $\partial_2(12)$ linear unabhängig von dieser Menge ist. Folglich ist $\dim H_2(A) \leq 6$. Da $\dim H_2(A) - \dim H_1(A) = 6$ ist, folgt $\dim H_2(A) = 6$ und $\dim H_1(A) = 0$.

$\underline{B}$: Nebenklassen von G(2) = $T_d \longleftrightarrow x_0,\ldots,x_7$,

Nebenklassen von G(1) = $T_c \longleftrightarrow y_0,\ldots,y_7$,

Nebenklassen von G(0) = $Z_{cd} \longleftrightarrow z_0,\ldots,z_{11}$.

Kammer :	0	1	2	3	4	5	6	7
Seiten der	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5	x_4
Dimension 1:	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_4	y_6
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_0	z_4	z_5	z_6

Kammer :	8	9	10	11	12	13	14	15
Seiten der	x_6	x_7	x_0	x_0	x_3	x_2	x_3	x_1
Dimension 1:	y_4	y_7	y_2	y_3	y_0	y_0	y_1	y_2
	z_7	z_1	z_4	z_6	z_5	z_7	z_8	z_9

Kammer :	16	17	18	19	20	21	22	23
Seiten der	x_1	x_2	x_1	x_5	x_6	x_7	x_6	x_5
Dimension 1:	y_1	y_3	y_7	y_6	y_7	y_5	y_5	y_6
	z_{10}	z_{11}	z_8	z_{11}	z_{10}	z_9	z_2	z_3.

Tabelle B

Aus der Tabelle liest man unmittelbar ab, daß $\{\partial_2(k) | k=0,\ldots,9,14,\ldots,17\}$ linear unabhängig ist. Einfache Rechnung zeigt, daß $\{\partial_1(k) | k=0,\ldots,18\}$ linear unabhängig ist. Wegen dim $H_2(\mathbb{B})$ - dim $H_1(\mathbb{B})$ = 5 folgt dim $H_2(\mathbb{B})$ = 5 und dim $H_1(\mathbb{B})$ = 0.

$\underline{\mathbb{C}}$: Nebenklassen von G(2) = T_d $\longleftrightarrow$ $x_0,\ldots,x_7$,

Nebenklassen von G(1) = $Z_{(ab)(cd)}$ $\longleftrightarrow$ $y_0,\ldots,y_{11}$,

Nebenklassen von G(0) = Z_{cd} $\longleftrightarrow$ $z_1,\ldots,z_{11}$.

Kammer :	0	1	2	3	4	5	6	7
Seiten der	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_4	x_5	x_4
Dimension 1:	y_o	y_o	y_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	z_o	z_1	z_2	z_3	z_o	z_4	z_5	z_6
Kammer :	8	9	10	11	12	13	14	15
Seiten der	x_6	x_7	x_o	x_o	x_3	x_2	x_3	x_1
Dimension 1:	y_6	y_2	y_7	y_8	y_9	y_{1o}	y_7	y_9
	z_7	z_1	z_4	z_6	z_5	z_7	z_8	z_9
Kammer :	16	17	18	19	20	21	22	23
Seiten der	x_2	x_1	x_5	x_7	x_6	x_7	x_6	x_5
Dimension 1:	y_8	y_{1o}	y_3	y_6	y_5	y_4	y_{11}	y_{11}
	z_{1o}	z_{11}	z_8	z_{11}	z_{1o}	z_9	z_2	z_3.

Tabelle C

Aus der Tabelle liest man ab, daß

$\{\partial_2(k) \mid k=0,\ldots,19,22\}$ linear unabhängig ist.

Wegen dim $H_2(\mathbb{C})$ - dim $H_1(\mathbb{C})$ = 3, folgt dim $H_2(\mathbb{C})$ = 3 und dim $H_1(\mathbb{C})$ = 0.

$\mathbb{D}$: Nebenklassen von $G(2) = V \longleftrightarrow x_0,\ldots,x_5$,

Nebenklassen von $G(1) = Z_{cd} \longleftrightarrow y_0,\ldots,y_{11}$,

Nebenklassen von $G(0) = Z_{ad} \longleftrightarrow z_0,\ldots,z_{11}$.

Kammer :	0	1	2	3	4	5	6	7
Seiten der	x_0	x_0	x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_3
Dimension 1:	y_0	y_1	y_2	y_3	y_0	y_4	y_5	y_6
	z_0	z_2	z_3	z_1	z_4	z_5	z_1	z_0
Kammer :	8	9	10	11	12	13	14	15
Seiten der	x_2	x_1	x_4	x_5	x_5	x_4	x_4	x_5
Dimension 1:	y_7	y_1	y_4	y_6	y_5	y_7	y_8	y_9
	z_6	z_7	z_4	z_5	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}
Kammer :	16	17	18	19	20	21	22	23
Seiten der	x_5	x_4	x_2	x_2	x_3	x_3	x_1	x_1
Dimension 1:	y_{10}	y_{11}	y_8	y_{11}	y_{10}	y_2	y_2	y_3
	z_6	z_7	z_8	z_{11}	z_3	z_2	z_9	z_{10}.

Tabelle D

Aus der Tabelle liest man unmittelbar ab, daß $\{\partial_2(k) | k=0,\ldots,17\}$ linear unabhängig ist. Einfache Rechnung zeigt, daß $\{\partial_2(k) | k=0,\ldots,20\}$ linear unabhängig ist. Wegen $\dim H_2(\mathbb{D}) - \dim H_1(\mathbb{D}) = 3$, folgt $\dim H_2(\mathbb{D}) = 3$ und $\dim H_1(\mathbb{D}) = 0$.

$\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{H}$: In allen vier Komplexen gilt $|G(i)| = 2$ für $i=0,1,2$. Derartige Komplexe heißen "dünn" (vgl. (8.3)). Sie werden in §8 genauer besprochen. Nach

Satz (8.3) ist dim $H_2(\Delta) \leq 1$. Mit dem Kriterium Satz (8.4) läßt sich nach Erstellen der Kammertabellen wie für die Komplexe A bis D berechnen: dim $H_2(E)$ = dim $H_2(G)$ = dim $H_2(H)$ = 1 und dim $H_2(F)$ = 0. Der Komplex H ist der Standardkomplex der Coxetergruppe Sym(4) (vgl. §9)

Wir stellen die gewonnenen Ergebnisse in einer Tabelle zusammen:

Komplex :	A	B	C	D	E	F	G	H
dim $H_1(\Delta)$:	0	0	0	0	3	0	2	0
dim $H_2(\Delta)$:	6	5	3	3	1	0	1	1 .

Tabelle 4

(6.5) Mit Hilfe der Spurformel von Hopf-Lefschetz (vgl.(5.2)) können wir nun ohne große Schwierigkeiten die Moduln $H_1(\Delta)$ für die 1-dimensionalen bzw. in den Fällen A bis D und H auch $H_2(\Delta)$ für die 2-dimensionalen stabilen Gruppenkammerkomplexe in der Sym(4) berechnen.

G = Sym(4) besitzt fünf irreduzible Darstellungen in Charakteristik 0, die sämtlich über $\mathbb{Q}$ realisierbar sind. $\mathbb{1}$ bezeichne den trivialen Modul $\mathbb{Q}$ (beachte, daß in allen Fällen $H_0(\Delta) \cong \mathbb{1}$ gilt), M_1 den 1-dimensionalen Modul mit alternierendem Charakter, M_2 den 2-dimensionalen, M_3 den 3-dimensionalen Modul, den

Summand des natürlichen Permutationsmoduls und schließlich M_4 den 3- dimensionalen $M_3 \otimes M_1$.

Die folgende Tabelle zeigt, wie die in der Hopf-Lefschetz-Formel auftretenden Permutationsmoduln in irreduzible Bestandteile zerfallen.

Permutationsmodul	$\mathbb{1}_A^G$	$\mathbb{1}_{G_a}^G$	$\mathbb{1}_{D_1}^G$	$\mathbb{1}_V^G$
Zerlegung	$\mathbb{1} \oplus M_1$	$\mathbb{1} \oplus M_3$	$\mathbb{1} \oplus M_2$	$\mathbb{1} \oplus M_1 \oplus M_2$ (2)

Permutationsmodul	$\mathbb{1}_{V_1}^G$	$\mathbb{1}_{Z_{ab}}^G$
Zerlegung	$\mathbb{1} \oplus M_2 \oplus M_3$	$\mathbb{1} \oplus M_2 \oplus M_3^{(2)} \oplus M_4$

Permutationsmodul	$\mathbb{1}_{Z_{(ab)(cd)}}^G$	$\mathbb{1}_{T_1}^G$
Zerlegung	$1 \oplus M_1 \oplus M_2^{(2)} \oplus M_3 \oplus M_4$	$1 \oplus M_1 \oplus M_3 \oplus M_4$

Permutationsmodul	$\mathbb{1}_{Z_{41}}^G$
Zerlegung	$\mathbb{1} \oplus M_2 \oplus M_4$.

Tabelle 5

Mit Tabelle 5 und der Hopf-Lefschetz-Formel lassen sich nun nach elementaren Rechnungen die Homologiemoduln für die 1-dimensionalen Gruppenkammerkomplexe in G angeben. Es gilt:

Komplex	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$H_1(\Delta)$	M_2	M_4	$M_2 \oplus M_4$	$M_2 \oplus M_3$	$M_2 \oplus M_3 \oplus M_4^{(2)}$

Komplex	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$H_1(\Delta)$	M_1	$M_1 \oplus M_4$	$M_1 \oplus M_3$	$M_1 \oplus M_4$	$M_2 \oplus M_3^{(2)} \oplus M_4^{(2)}$

Komplex	(11)	(12)	(13)
$H_1(\Delta)$	$M_1 \oplus M_3 \oplus M_4$	$M_2 \oplus M_4$	$M_3^{(2)} \oplus M_4^{(2)}$

Komplex	(14)	(15)
$H_1(\Delta)$	$M_1 \oplus M_2 \oplus M_3^{(2)} \oplus M_4^{(2)}$	$M_1 \oplus M_3^{(3)} \oplus M_4$

Komplex	(16)	(17)
$H_1(\Delta)$	$M_1 \oplus M_3 \oplus M_4$	$M_2 \oplus M_4$

Tabelle 6

Für die 2-dimensionalen Komplexe läßt sich ebenfalls leicht berechnen:

Komplex	𝔸	𝔹	ℂ	𝔻	𝔼
$H_2(\Delta)$	$M_3 \oplus M_4$	$M_2 \oplus M_3$	M_3	M_4	M_1.

Aufgrund der Schlußbemerkung, in (8.4) gilt $H_2(\mathbb{E}) = H_2(\mathbb{G}) = H_2(\mathbb{H}) = M_1$. So lassen sich auch noch die beiden fehlenden Homologiemoduln berechnen: $H_1(\mathbb{E}) = M_3$, $H_1(\mathbb{G}) = M_2$.

Es ist auffällig, daß sowohl bei den 1- als auch bei den 2-dimensionalen Gruppenkammerkomplexen in der Sym(4) sämtliche irreduziblen Moduln als Homologiemoduln eines geeigneten Komplexes erscheinen.

§7 Die abgeleiteten Komplexe $\Delta(J)$ und Δ_J

Sei stets $\Delta=\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex. Setze wie in (2.5) bzw. (2.6) $\Delta(J)=\Delta(G,(G_i)_{i\in J})$ und $\Delta_J=\Delta(G_{\bar J},(G_{\bar J}\cap G_i)_{i\in J})$, $J\subseteq I$, $|J|\geq 2$, $\bar J=I-J$.

(7.1) Lemma. (a) Sei Δ ein Gruppenkammerkomplex. Dann ist für alle $J\subseteq I$, $|J|\geq 2$, $\Delta(J)$ ebenfalls ein Gruppenkammerkomplex.

(b) Ist Δ stabil, so auch $\Delta(J)$ und Δ_J für alle $J\subseteq I$ mit $|J|\geq 2$.

Beweis. (a) Wegen Satz (4.2) ist zu zeigen $\langle G_{J-\{j\}} \mid j\in J\rangle = G$ für jede Teilmenge $J\subseteq I$, $|J|\geq 2$. Für festes $j\in J$ ist aber $G_{J-\{j\}}\leq \langle G(k) \mid k\in \bar J\cap\{j\}\rangle$. Folglich gilt

$$\langle G_{J-\{j\}} \mid j\in J\rangle \geq \langle G(k) \mid k\in \bar J\cup J=I\rangle = G.$$

(b) Die Behauptung folgt für $\Delta(J)$ direkt aus der Definition eines stabilen Gruppenkomplexes (vgl.(2.2)). Da $G_{\bar J}(i)=G(i)$ für alle $i\in J$ gilt, ist Δ_J wegen Satz (2.2) ebenfalls stabil. □

Die Umkehrung der Aussage (a) des Lemmas ist im allgemeinen nicht richtig. Sei z.B. $G=\mathrm{Sym}(5)$, $G_0\neq G_1$ seien 2-Sylowgruppen von G, G_2 sei ein Punktstabilisator von G. Dann gilt offensichtlich

$$G=\langle G_i \mid i\in J\rangle$$

für jede 2-elementige Teilmenge J von I={0,1,2}. Aber der Komplex $\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ist kein Gruppenkammerkomplex.

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung läßt sich Lemma (7.1)(a) auch umkehren. Wir definieren: Ein Kammerkomplex Δ heiße umkehrbar, falls für jede nichtleere Teilmenge J von I gilt

$$G_J=\langle G(k)\,|\,k\in J\rangle.$$

1-dimensionale Gruppenkomplexe sind also immer umkehrbar. Die Komplexe $\mathbb{A}$ bis $\mathbb{D}$ und $\mathbb{F}$ bis $\mathbb{H}$ aus §6 sind ebenfalls umkehrbar. Die wichtigsten Beispiele für umkehrbare Gruppenkomplexe sind die Standardkomplexe der Coxetergruppen und Gruppen mit (B,N)-Paar (vgl.§§ 9,12).

Satz. Sei Δ umkehrbar. Genau dann ist Δ ein Gruppenkammerkomplex, wenn es eine Teilmenge $J\subseteq I$ mit $|J|=2$ gibt, für die der Gruppengraph $\Delta(G,(G_i)_{i\in J})$ zusammenhängend ist.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus Lemma (7.1)(a). Sei umgekehrt der Gruppengraph $\Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ zusammenhängend für ein J mit $|J|=2$. Wegen Satz (4.2) ist also $G=\langle G_i\,|\,i\in J\rangle$. Da Δ umkehrbar ist, ist $G_i=\langle G(k)\,|\,i\neq k\in I\rangle$. Somit ist $G=\langle G(k)\,|\,k\in I\rangle$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Die "globalen" Strukturen von Δ und Δ_J stehen nicht in so engem Zusammenhang, da Δ_J als Stern eines Simplex in Δ "lokale" Eigenschaften von Δ widerspiegelt. Δ_J ist im allgemeinen kein Gruppenkomplex, sogar nicht einmal zusammenhängend, wenn Δ ein Gruppenkammerkomplex ist. Ist Δ jedoch ein umkehrbarer Komplex, so ist Δ_J ein Gruppenkammerkomplex für jede nichtleere Teilmenge J ($|J|\geq 2$) von I, ohne daß Δ auch nur zusammenhängend zu sein braucht.

(7.2) Es besteht eine Art von Dualität zwischen den Komplexen Δ_J und $\Delta(J)$. Diese für die Berechnung von Homologie und die Klärung geometrischer Struktur der abgeleiteten Komplexe wichtige Beziehung wollen wir nun erläutern.

Per definitionem ist Δ_J der Stern von $(\bar{J},1)$ in Δ. $(J,1)$ ist die Fundamentalkammer von $\Delta(J)$. Sowohl $\Delta(J)$ als auch Δ_J haben die Dimension $\ell_J := |J|-1$. Es gilt aber mehr:

Lemma 1. Die simpliziale Abbildung

$$f: \Delta_J \to \Delta(J) \ , \ (\bar{J}\cup K, x) \mapsto (K,x)$$

für $\emptyset \neq K \subseteq J$ und $x \in G_{\bar{J}}$ ist injektiv.

Beweis. f ist offenbar wohldefiniert. Sei $f(\bar{J}\cup K,x)=f(\bar{J}\cup K,y)$. Dann ist $xy^{-1}\in G_K$. Andererseits ist nach Voraussetzung $xy^{-1}\in G_{\bar{J}}$, also $xy^{-1}\in G_{\bar{J}}\cap G_K=G_{\bar{J}\cup K}$. □

Δ_J ist isomorph zum Teilkomplex $A:=\{(K,x)\mid K\subseteq J, x\in G_{\bar{J}}\}$ von $\Delta(J)$. A trägt die von $\Delta(J)$ induzierte Färbung. Offenbar ist $A\cong\Delta_J$ als gefärbter Komplex. Für jedes $y\in G$ ist dann Ay ein zu Δ_J isomorpher Teilkomplex von $\Delta(J)$. (Ay "entspricht" $\mathrm{stern}_\Delta(\bar{J},y)$.)

Lemma 2. (a) Sei H die größte Untergruppe von G_J derart, daß $G_{\bar{J}}H$ eine Untergruppe von G ist. Dann gilt

$$S(A):=\mathrm{Stab}_G A = G_{\bar{J}}H\ .$$

(b) S(A) operiert typerhaltend auf A, und es gilt

$$\bigcap_{g\in G_{\bar{J}}} G_J^{\,g} = \ker(S(A)\to \mathrm{Taut}\ A).$$

Insbesondere ist $H\geq \bigcap_{g\in G_{\bar{J}}} G_J^{\,g}$.

(c) Sei $x\in G$. Genau dann ist $(J,1)\in \mathrm{cham}\ Ax$, wenn $x\in G_{\bar{J}}G_J$ ist.

(d) Es gibt genau $|G_J:H|$ viele G-Konjugierte Ax, die die Fundamentalkammer (J,1) enthalten.

(e) G operiert transitiv auf den Paaren $((J,x),Ay)$ mit $(J,x)\in \mathrm{cham}\ Ay$.

Beweis. (a) Sei H' eine Untergruppe von G_J derart, daß $S:=H'G_{\bar{J}}$ ein Untergruppe von G ist. Sei $y=kg\in S$ mit $k\in H'$, $g\in G_{\bar{J}}$. Es genügt zu zeigen, daß cham A invariant unter y ist. Sei $(J,x)\in$Cham A, also o.B.d.A. $x\in G_{\bar{J}}$. Wegen $(J,x)y=(J,xy)=(J,xkg)$ ist zu zeigen,daß ein $z\in G_{\bar{J}}$ existiert mit $xkgz^{-1}\in G_J$ (cham A $=\{(J,x)\in$cham $\Delta(J)|$ ex. $z\in G_{\bar{J}}$ mit $(J,x)=(J,z)\}$). Nach Voraussetzung ist $H'G_{\bar{J}}=G_{\bar{J}}H'$. Folglich existieren $k'\in H'$ und $x'\in G_{\bar{J}}$ mit $xk=k'x'$. Wegen $x'g\in G_{\bar{J}}$ und $H'\leq G_J$ ist $z=x'g$ das gesuchte Element. Wegen $(J,1)\in$cham A existieren andererseits zu $x\in S(A)$ $g\in G_{\bar{J}}$ und $h\in G_J$ mit $x=hg$.

(b) Es ist klar, daß $S(A)$ typerhaltend auf A operiert. Sei $h\in S(A)$.

$$h\in\ker(S(A)\to \mathrm{Taut}\ A) \Leftrightarrow G_J gh=G_J g \text{ für alle } g\in G_{\bar{J}}$$
$$\Leftrightarrow h\in \bigcap_{g\in G_{\bar{J}}} G_J{}^g$$

Der Rest folgt aus (a).

(c) Die Kammern von Ax haben die Gestalt (J,gx) mit $g\in G_{\bar{J}}$. Folglich ist $(J,1)\in$cham Ax genau dann, wenn ein $g\in G_{\bar{J}}$ existiert mit $gx\in G_J$.

(d) Dies ist eine Folgerung aus (a) und (c).

(e) G ist transitiv auf $\{Ax|x\in G\}$ und $s(A)$ ist transitiv auf cham A. □

Folgerung. Genau dann gilt $\Delta(J)\cong A_J$, wenn $G=G_JG_{\bar{J}}$ ist.

Beweis. Ist $\Delta(J) \subseteq \Delta_J$, so ist in den obigen Bezeichnungen $A = \Delta(J)$. Folglich ist $S(A) = G$ und mit Lemma 2(a) ist dann $G = G_J \cdot G_{\bar{J}}$. Ist umgekehrt $G_J \cdot G_{\bar{J}} = G$, so ist nach Lemma 2(a) $S(A) = G$. Wegen der Transitivität von G auf cham $\Delta(J)$ ist damit cham $\Delta(J)$ = cham A, also $\Delta(J) = A$. □

Es ist nun leicht anzugeben, wann für die Beispielkomplexe 𝔸-ℍ in (6.3) die abgeleiteten Komplexe $\Delta(J)$ und Δ_J isomorph sind.

Beispiel. Im Komplex 𝔸 ist für alle 3 möglichen 2-elementigen Teilmengen J von $I = \{0,1,2\}$ $\Delta(J) = \Delta_J$. In den Komplexen 𝔹 und ℂ gilt dies, falls $J = \{1,2\}$, im Komplex 𝔻, falls $J = \{0,1\}$. Dies sind alle Fälle.

Da A ein Kammerteilkomplex von $\Delta(J)$ mit $\dim A = \ell_J = \dim \Delta(J)$ ist, überträgt sich die Homologie in der Dimension ℓ_J von Δ_J auf $\Delta(J)$.

Lemma 3. Sei K wie üblich ein Hauptidealring. Ist $\operatorname{rang} H_{\ell_J}(\Delta_J,K) = n$, so ist $\operatorname{rang} H_{\ell_J}(\Delta(J),K) \geq n$. Das Gleichheitszeichen tritt genau dann auf, wenn $\Delta(J) \subseteq \Delta_J$ gilt.

Beweis. Setze $\partial = \partial_{\ell_J}$ für den Randoperator der Dimension ℓ_J auf $C(\Delta(J),K)$. $C_{\ell_J}(A,K)$ ist ein Teilmodul von $C_{\ell_J}(\Delta(J),K)$, ebenso $\ker \partial|_{C_{\ell_J}(A,K)} \subseteq \ker \partial$

$= H_{\ell_J}(\Delta(J),K)$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung. Ist $A \neq \Delta(J)$, so existiert ein $c \in \text{cham}\,\Delta(J) - \text{cham}\,A$. Ist ferner $0 \neq z = \sum_{x \in \text{cham}\,A} a_x x$ mit $z \in \ker \partial$ und $y \in \mathrm{Tr}(z)$, so existiert ein $g \in G$ mit $yg = c$. Dann ist $zg \notin \ker \partial|_{C_{\ell_J}(A,K)}$. □

Setzen wir $M = \langle (\ker\partial|_{C_{\ell_J}(\Delta,K)})x \mid x \in G \rangle_K$, so ist M der Teilmodul von $H_{\ell_J}(\Delta(J),K)$, der von Δ_J ausgehend gewonnen werden kann. Jedoch ist i.allg. $M \neq H_{\ell_J}(\Delta(J),K)$. Als Beispiele können die abgeleiteten Komplexe der Beispiele E und G in (6.3) dienen.

(7.3) Wir wollen nun die Homologie von Δ in Beziehung zur Homologie der abgeleiteten Komplexe setzen.

Da Δ_J der Stern von (J,1) in A ist, sind die Simplices von Δ_J von der Gestalt (L,x) mit $\bar{J} \subseteq L$ und $x \in G_{\bar{J}}$. Wenn wir im folgenden ein Simplex (L,x) von Δ als Element von Δ_J auffassen wollen, machen wir dies durch Indizierung mit J kenntlich: $(L,x)_J \in \Delta_J$. Sei wie üblich K ein Hauptidealring. Wir bezeichnen mit res_J die K-lineare Fortsetzung der Abbildung von $C_\ell(\Delta,K)$ in $C_{\ell_J}(\Delta_J,K)$ definiert durch

$$\mathrm{res}_J(L,x) = \begin{cases} (L,x)_J, & \text{falls } (\bar{J},1) \text{ Seite von } (L,x) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma. res_J definiert einen Homomorphismus von $KG_{\bar{J}}$-Moduln von $H_\ell(\Delta,K)$ in $H_{\ell_J}(\Delta_J,K)$, den wir ebenfalls mit res_J bezeichnen.

Beweis. Sei R ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von G_I in G. Nach (3.4) ist $z = \sum_{x\in R} a_x(I^i,x)$ mit $a_x \in K$ ein Element von $\ker \partial_\ell$ ($= H_\ell(\Delta,K)$) genau dann, wenn $\sum_{x\in R} a_x(I^i,x) = 0$ ist für alle $i \in I$. Zwei Kammern (I,x) und (I,y) sind genau dann I^i-benachbart, wenn $xy^{-1} \in G(i)$ ist. Ist also $i \in J$ und $(I,x)_J$ eine Kammer von Δ_J, d.h. $x \in G_{\bar{J}}$, so liegen folglich auch alle I^i-Nachbarn von (I,x) im Stern von $(\bar{J},1)$. Damit ist $\sum_{x\in R\cap G_{\bar{J}}} a_x(I^i,x) = 0$. Bezeichnen wir mit ∂_J den Randoperator von $(\mathcal{C}(\Delta_J),K)$, so ist $\partial_J \circ res_J(z) = 0$. Der Rest der Behauptung ist klar. □

Satz. Ist $H_\ell(\Delta,K) \neq 0$, so auch $H_{\ell_J}(\Delta_J,K)$ und $H_{\ell_J}(\Delta(J),K)$ für jede Teilmenge $J \subseteq I$, $|J| \geq 2$.

Beweis. Sei $0 \neq z = \sum_{x\in R} a_x(I,x)$ (Bezeichnungen wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas) ein Element von $H_\ell(\Delta,K)$. Nach Voraussetzung ist $Tr(z) = \{x \in R \mid a_x \neq 0\} \neq \emptyset$. Ist $Tr(z) \cap G_{\bar{J}} \neq \emptyset$, so $0 \neq res_J(z) \in H_{\ell_J}(\Delta_J,K)$. Andernfalls wähle $y \in Tr(z)$ und setze $\bar{z} = zy^{-1}$. Dann ist $0 \neq \bar{z} \in H_\ell(\Delta,K)$ und $res_J(\bar{z}) \neq 0$. Es ist also stets $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) \neq 0$. Der Rest der Behauptung folgt aus (7.2), Lemma 3. □

Ist $H_\ell(\Delta,K) = 0$, so kann die Tophomologie von Δ_J (und damit auch von $\Delta(J)$) durchaus nichttrivial sein. Ist zum Beispiel $|J| = 2$, so ist stets $H_1(\Delta_J,K) \neq 0$ (5.3). Ist Δ der 2-dimensionale Komplex F in (6.3), so ist $H_2(\Delta) = 0$ aber $H_1(\Delta_J) \neq 0$ für jede Teilmenge $J \subseteq \{0,1,2\}$ mit $|J| = 2$. Es gilt also auch nicht $H_\ell(\Delta,K) \neq 0$, falls $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) \neq 0$ für alle $J \subsetneq I$ mit $|J| \geq 2$ ist.

§8 Gruppenkomplexe mit Tophomologie vom Rang 1

Wie bisher bezeichne $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ einen Gruppenkomplex mit $|I| = \ell+1$. Für $|G:G_I|$ endlich hatten wir in (4.3) schon gesehen, daß aus rang $H_\ell(\Delta,K) = 1$ (K wie üblich ein Hauptidealring) folgt, daß Δ ein Gruppenkammerkomplex ist. Tatsächlich ist Δ immer ein endlicher Komplex, falls rang $H_\ell(\Delta,K) = 1$ ist. Obendrein können Aussagen über die Struktur von G abgeleitet werden.

(8.1) Lemma. Ist rang $H_\ell(\Delta,K) = 1$, so ist Δ ein endlicher Gruppenkammerkomplex.

Beweis. Die Kammern von Δ bilden eine Permutationsbasis des KG-Moduls $C_\ell(\Delta,K)$, auf der G transitiv operiert. Nach Voraussetzung existiert ein nichttriviales Element $z = \sum_{x\in \mathrm{cham}\Delta} a_x x$ mit $a_x \neq 0$ für endlich viele Kammern x von Δ aus $H_\ell(\Delta,K) = \ker\partial_\ell$, und es gilt $H_\ell(\Delta,K) = \langle z\rangle_K$. Da $H_\ell(\Delta,K)$ ein KG-Modul ist, ist $zg = \alpha_g z$, α_g eine Einheit von K, für jedes $g\in G$. Da G transitiv auf den Kammern von Δ operiert, ist $\mathrm{Tr}(z) = \mathrm{cham}\Delta$ und somit Δ endlich. Mit (4.3) folgt dann die Behauptung. □

Wir können sogar Aussagen über die Struktur von G machen.

Satz. Sei charK=0 und sei rang $H_\ell(\Delta,K) = 1$. Dann existiert ein Gruppenepimorphismus $\alpha: G \to \{\pm 1\}$ auf die zyklische Gruppe der Ordnung 2 derart, daß

(a) $\langle G_I^g \mid g \in G\rangle \leq \ker\alpha$;

(b) $G(i) \not\leq \ker\alpha$ für jedes $i \in I$.

Beweis. Da K torsionsfrei ist, ist K $\mathbb{Z}$-flach (Bourbaki[8], S.29). Folglich ist ebenfalls rang $H_\ell(\Delta,\mathbb{Z}) = 1$. Nach Lemma (8.1) ist $|G:G_I| = |\text{cham}\Delta|$ endlich. Sei $z = \sum_{x \in \text{cham}\Delta} a_x x$ ein erzeugendes Element von $H_\ell(\Delta,\mathbb{Z})$. Dann ist $\text{Tr}(x) = \text{cham}\Delta$ und für jedes $g \in G$ ist, wie im Beweis von Lemma (8.1), $zg = \pm z$. Die Abbildung

$\alpha: G \to \{\pm 1\}$, definiert durch

$$\alpha(g) = \begin{cases} 1, & \text{falls } zg = z \\ -1, & \text{falls } zg = -z \end{cases}$$

ist dann ein Homomorphismus. Liegt $g \in G$ im Stabilisator einer Kammer von Δ, so gilt $zg = z$ und g liegt in $\ker\alpha$. Daraus folgt (a).

Da G transitiv auf den Kammern in Δ operiert, hängt nur das Vorzeichen von $a_x = \pm a$ von $x \in \text{cham}\,\Delta$ ab. Da z ein erzeugendes Element von $H_\ell(\Delta,\mathbb{Z})$ ist, ist etwa $a=1$ und $a_x \in \{\pm 1\}$. Für $i \in I$ sei R_i ein Repräsentantensystem von (Rechts-)Nebenklassen von G_I in G(i). Dann ist

$$\text{stern}_\Delta(I^i,1) = \{(I^i,r) \mid r \in R_i\},$$

und es gilt nach (3.4) $\sum_{r \in R_i} a_r = 0$. O.B.d.A. können wir $a_1 = 1$ annehmen. Dann existiert ein $r_o \in R_i$ mit $a_{r_o} = -1$.

Folglich ist $zr_o=-z$ und $r_o \notin \ker\alpha$. Dies ergibt (b). □

Der Charakter von $H_\ell(\Delta,K)$ ist gerade α. Aus den Sätzen (2.2) und (8.1) ergibt sich unmittelbar, daß Δ stabil ist. Ist charK=2, so gilt Satz (8.1) nicht mehr (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz (8.3)).

(8.2) Wir fassen die über die Struktur von G gewonnenen Ergebnisse zusammen und erweitern sie noch um ein weniges.

Satz. Sei charK=0 und sei rang $H_\ell(\Delta,K)=1$. Dann gilt

(a) $|G:G_I|$ ist endlich und $G = \langle G(i) | i\in I\rangle$.

(b) G besitzt einen Normalteiler N mit $G(i)\not\leq N$ für alle $i\in I$ und $\langle G_I^g | g\in G\rangle \leq N$. Ferner ist $|G/N|=2$.

(c) Für $\emptyset \neq J \subsetneq I$ besitzt G_J einen Normalteiler $N_J = N \cap G_J$ mit $|G_J/N_J| = 2$. Dabei ist $N_J \neq N_{J\cup\{j\}}$ für jedes $j\in\bar{J}$. Es sei denn $|I-J| = 1$ und $N_J = G_I = N_I$.

Beweis. (a) ist Lemma (8.1). (b) folgt aus dem vorangehenden Satz.

(c) Wegen $G_J \geq \langle G(i) | i\in\bar{J}\rangle$, ist $N\cap G_J = N_J$ ein Normalteiler von G_J mit $|G_J/N_J|=2$. Angenommen $N_J = N_{J\cup\{j\}}$ für ein $j\in\bar{J}$. Wäre $|G_{J\cup\{j\}}:N_J|=2$, so wäre $G_{J\cup\{j\}}=G_J$, ein Widerspruch gegen die Stabilität von Δ. Also ist nach dem ersten Teil der Aussage $J\cup\{j\}=I$. □

Ist $\dim\Delta=1$, so läßt sich G genau angeben.

Beispiel. Seien die Voraussetzungen wie im vorangehenden Satz. Ist $\ell=1$, so ist $G_I \trianglelefteq G$ und G/G_I eine endliche Diedergruppe.

Beweis. Aufgrund von Satz (8.2) ist $|G:G_I|$ endlich und Δ zusammenhängend. Nach (5.3) ist damit

$$|G:G_I| = |G:G_o| + |G:G_1|.$$

Somit ist $|G_o:G_I| = 2 = |G_1:G_I|$ und die Behauptung folgt. □

(8.3) Wir wollen nun eine Klasse von Komplexen vorstellen, die die wichtigsten Beispiele für Gruppenkomplexe Δ mit $\operatorname{rang} H_\ell(\Delta,K)=1$ enthält.

Definition (Vgl. Tits[34], S. 4).
Sei $\Delta = (\Delta,I,f)$ ein gefärbter Komplex.
Δ heißt dünn, falls jedes Element der Codimension 1 von Δ in genau 2 Kammern enthalten ist.
Ein dünner Kammerkomplex der Dimension n wird in der algebraischen Topologie als "n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ohne Rand" bezeichnet (vgl. Spanier [24], S.150).

Lemma. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein Gruppenkomplex. Δ ist genau dann dünn, wenn für alle $i\in I$ $|G(i):G_I|=2$ ist. Insbesondere ist in einem dünnen Gruppenkomplex stets $G_I \trianglelefteq \langle G(i) \mid i\in I\rangle$.

Beweis. Sei $(I^i,1)$ ein Fundamentalsimplex der Dimension ℓ-1. Genau die Kammern (I,x) mit $x\in G(i)$ enthalten $(I^i,1)$ als Seite. □

Im Satz (8.2) haben wir gesehen, daß aus rang $H_\ell(\Delta,K)=1$ folgt: 2 teilt $|G(i):G_I|$. Mir ist jedoch kein Beispiel eines Gruppenkomplexes mit rang $H_\ell(\Delta,K)=1$ bekannt, der nicht dünn ist.

Satz (Vgl. Spanier [24], S.206, Ex.E2).
Ist Δ ein dünner Gruppenkammerkomplex, so ist $H_\ell(\Delta,K)=0$ oder rang $H_\ell(\Delta,K)=1$.

Beweis. Angenommen $H_\ell(\Delta,K)\neq 0$. Dann existiert ein Zykel $0\neq z=\sum_{x\in \mathrm{cham}\,\Delta} a_x x$ in $H_\ell(\Delta,K)$. Sei $x\in Tr(z)$. Weil Δ dünn ist, liegt dann auch jede Kammer y von Δ, die zu x I^i-benachbart ist für ein $i\in I$, im Träger von z und es gilt $a_x = -a_y$. Da Δ ein Kammerkomplex ist, ist $Tr(z)=\mathrm{cham}\,\Delta$ und es existiert ein $0\neq a\in K$ mit $z = a(\Sigma\alpha(x)x)$, $\alpha(x)\in\{\pm 1\}$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Ist Δ dünn und charK=2, so ist stets $H_\ell(\Delta)\neq 0$, denn $z=\sum_{x\in \mathrm{cham}\Delta} x$ erzeugt $H_\ell(\Delta,K)$. Es ist kein Problem, in G=Alt(5) einen 2-dimensionalen, dünnen Gruppenkammerkomplex zu konstruieren. Da G einfach ist, gilt für jeden solchen Komplex Δ nach (8.2)
$H_\ell(\Delta,\mathbb{Z}) = 0$. Die Komplexe E-H in (6.3) sind Beispiele dünner Gruppenkammerkomplexe. Nur Komplex F besitzt triviale Homologie.

(8.4) Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein endlicher, dünner Gruppenkammerkomplex mit $G_I=1$. (Dies ist wegen $G_I \trianglelefteq G$ (Lemma(8.3)) keine wesentliche Einschränkung.) Es ist $G(i) = \langle x_i \rangle$ mit Involutionen x_i, und $G=\langle x_i | i\in I\rangle$. Die Kammern von Δ sind die Elemente von G. Der Abstand $d(x,1)$ einer Kammer x von der Fundamentalkammer ist dann identisch mit der kürzesten Länge eines reduzierten Wortes $x = x_{i_0} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$ mit $x_{i_j} \in S := \{x_i | i\in I\}$.

Satz. Sei charK=0. Genau dann ist $H_\ell(\Delta,K)\neq 0$, wenn für alle $x\in G$, $x_i\in S$ gilt: $d(x_i x,1) \neq d(x,1)$.

Beweis. Sei $H_\ell(\Delta,K)\neq 0$. Nach Satz (8.3) ist rang $H_\ell(\Delta,K)=1$. Sei nun $z = \sum_{x\in cham\Delta} a_x x$ ein erzeugendes Element von $H_\ell(\Delta,K)$. Aus dem Beweis von Satz (8.1) entnehmen wir, daß $a_x\in\{\pm 1\}$ für jede Kammer x von Δ gilt. O.B.d.A. können wir $a_1=1$ annehmen. Dann ist $a_x=(-1)^{d(x,1)}$. Da jedes Element der Codimension 1 in genau zwei Kammern liegt, folgt $a_x=-a_y$ für benachbarte Kammern x,y. Die Kammern x und $x_i x$ sind I^i-benachbart.

Gelte nun $d(x_i x,1) \neq d(x,1)$ für alle $x\in G$, $x_i\in S$. Dann haben je zwei benachbarte Kammern von Δ verschiedenen Abstand zur Fundamentalkammer. Da Δ dünn ist, ist folglich $z = \sum_{x\in cham\Delta}(-1)^{d(x,1)}x$ ein Element von $H_\ell(\Delta,K)$. □

Ist $H_\ell(\Delta,K)\neq 0$, so ist der Charakter α von G auf $H_\ell(\Delta,K)$ offensichtlich gegeben durch

$$\alpha(x) := (-1)^{d(x,1)} \qquad \text{(vgl. (8.1))}.$$

(8.5) Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein dünner Gruppenkammerkomplex, Δ_J für $J\subseteq I$ wie üblich der Stern von $(\bar{J},1)$ in Δ. Wir setzen $n_J := |G_{\bar{J}}:\langle G(i)|i\in J\rangle|$.

Satz. Sei $H_\ell(\Delta,K) \neq 0$. Es gilt:

(a) rang $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) = n_J$.

(b) Ist Δ umkehrbar, so ist rang $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) = 1$.

Beweis. (b) ist ein Spezialfall von (a).

(a) Δ_J ist wie Δ ein dünner Gruppenkomplex. Nach Satz (7.3) ist dann jedenfalls $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) \neq 0$. Nach Satz (4.3) ist $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) = H_{\ell_J}(\bar{\Delta},K)_F{}^{G_{\bar{J}}}$, wobei $F:=\langle G(i)|i\in J\rangle$ und $\bar{\Delta}=\Delta(F,(F\cap G_i)_{i\in J})$ ist. Aus rang $H_{\ell_J}(\bar{\Delta},K)=1$ ($\bar{\Delta}$ dünn) folgt nun die Behauptung. □

§9 Coxetergruppen und Coxeterkomplexe

Mit den Coxeterkomplexen werden in diesem Paragraphen die neben den Gebäuden wichtigsten Gruppenkomplexe behandelt. Im Mittelpunkt steht ein Satz von Solomon über Homologiedarstellungen von Coxetergruppen.

(9.1) Sei W eine Gruppe und $S = \{w_i | i \in I\}$, $|I| = \ell+1$ eine endliche Menge von Erzeugenden von W. Das Paar (W,S) heißt Coxetergruppe vom Rang $\ell+1$, falls die Elemente von S Involutionen sind und die Relationen $(w_i w_j)^{m_{ij}} = 1$, $m_{ij} = o(w_i w_j)$ eine Präsentation von W bilden. Sind keine Verwechslungen möglich, schreiben wir auch "die Coxetergruppe W". Über Coxetergruppen existiert eine umfangreiche Literatur (z.B. Bourbaki [4], Chap. IV; Tits [34] §2; Suzuki [31], Chap. 3, §4), aus der wir einige Resultate benötigen.

Wir setzen $W_i := \langle w_j | i \neq j \in I \rangle$. Der Gruppenkomplex $\Delta = \Delta(W,(W_i)_{i \in I})$ heißt Standardkomplex der Coxetergruppe (W,S).

(i) Δ ist umkehrbar ([4], S.30, Théorème 2; [34], S.20, Theorem 2.16). Somit ist Δ ein dünner Gruppenkammerkomplex, die Kammern von Δ sind identifizierbar mit den Elementen von W. (Zur Schreibweise (vgl.(2.2).)

(ii) Für $\emptyset \neq J \subseteq I$ ist (W_J, S_J) mit $S_J = \{w_i \in S \mid i \in J\}$ eine Coxetergruppe (vgl. [4],S.20)

(iii) Wir definieren für jedes $w \in W$ die Länge von w als die kleinstmögliche Wortlänge von w in den $w_i \in S$ und bezeichnen sie mit $l(w)$. Es gilt

$$l(w_i w) = l(w) + 1 \text{ oder } l(w_i w) = l(w) - 1$$
$$\text{bzw. } l(w w_i) = l(w) + 1 \text{ oder } l(w w_i) = l(w) - 1$$

(vgl. [4],S.15, Proposition 4). Aus Satz (8.4) folgt also, daß $H_\ell(\Delta, K) \neq 0$ (K Hauptidealring der Charakteristik 0), also wegen (ii) und Satz (8.3) $= K$ ist.

(iv) In jeder Nebenklasse $W_J w$ gibt es genau ein Element $m(J,w)$ minimaler Länge, und es ist $l(w) = l(m(J,w)) + l(w\, m(J,w)^{-1})$ (vgl. [4],§37, Exercice 3).

(v) Ist $w \in W_J$ so enthält jede reduzierte Darstellung von W in S nur Elemente aus S_J (vgl. [4],S.19, Corollaire 1).

(9.2) Sei (Δ, I, f) ein dünner, gefärbter Kammerkomplex. Eine typerhaltende simpliziale Abbildung $\psi: \Delta \to \Delta$ heißt Faltung, falls ψ idempotent ist und jede Kammer in $\psi(\Delta)$ genau zwei Kammern als Urbilder unter ψ besitzt (vgl. Tits [34],S.7)

Der Standardkomplex einer Coxetergruppe (W,S)

besitzt "viele" Faltungen. Seien die Bezeichnung wie in (9.1). Die Abbildung

$$\psi_i(J,w) = \begin{cases} (J,w), \text{ falls } l(ww_i) > l(w) \\ (J,ww_i), \text{falls } l(ww_i) < l(w) \end{cases}$$

ist eine Faltung, die die Kammern w_i auf die Fundamentalkammer 1 abbildet. Da die w_i, $i \in I$, genau die zu 1 benachbarten Kammern sind, und da W transitiv auf cham Δ operiert, gibt es folglich zu je zwei benachbarten Kammern x,y von Δ eine Faltung, die x auf y abbildet.

Ein dünner gefärbter Komplex (Δ,I,f) für den zu je zwei benachbarten Kammern c,c' eine Faltung existiert, die c auf c' abbildet, heißt Coxeterkomplex (vgl.[34],S,13. (Üblicherweise setzt man in der Definition eines Coxeterkomplexes Δ nicht voraus, daß Δ gefärbt ist. Jedoch besitzt jeder derartige "Coxeterkomplex" eine im wesentlichen eindeutige Färbung (vgl. [34],S.14).

Der Standardkomplex einer Coxetergruppe ist also ein Coxeterkomplex. Es gilt sogar genauer, daß jeder Coxeterkomplex isomorph zum Standardkomplex einer Coxetergruppe ist (vgl. [34],S.16).

H.S.M. Coxeter hat alle endlichen unzerlegbaren (d.h. nicht als direktes Produkt zweier

nichttrivialer Coxetergruppen schreibbaren) Coxetergruppen bestimmt (Coxeter [11], vgl. auch Suzuki [31] . Es gibt drei Klassen (bezeichnet mit A_n, C_n, D_n, $n \in \mathbb{N}$) und sieben Ausnahmegruppen (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2^m, H_3, H_4).

Da (W_J, S_J) (siehe (9.1)) ebenfalls eine Coxetergruppe ist, ist der abgeleitete Komplex Δ_J (Δ Standardkomplex von (W,S)) für alle $J \subseteq I, |J| \geq 2$ ebenfalls ein Coxeterkomplex. Man kann ohne Schwierigkeiten die Struktur (den Typ) der abgeleiteten Komplexe Δ_J bestimmen. (Benütze z.B. die den Coxetergruppen zugeordneten Diagramme, [34],S. 23.)

(9.3) Sei $\Delta = \Delta(W,(W_i)_{i \in I})$ der Standardkomplex der Coxetergruppe (W,S) mit $|I| \geq 2$, W endlich. Δ ist ein dünner Gruppenkammerkomplex. Setze im folgenden $H_i(\Delta) := H_i(\Delta,\mathbb{Z})$ für $i \geq 0$. Wegen der in (9.1) angegebenen Eigenschaft der Längenfunktion l auf W und mit Satz (8.4) ist $\operatorname{rang} H_\ell(\Delta) = 1$. Wegen Satz (7.3) ist damit auch $H_{\ell_J}(\Delta(J)) \neq 0$ für $J \subseteq I$, $|J| \geq 2$. Da $\Delta(J)$ ein Gruppenkammerkomplex ist, ist außerdem $H_0(\Delta(J)) = \mathbb{Z}$ (vgl. (3.8), Beispiel 1). Wir zeigen, daß die übrigen Homologiegruppen von $\Delta(J)$ verschwinden. Für $J=I$ ist dies ein Resultat von Solomon [21], den allgemeinen Satz hat kürzlich auch Björner [2] für schälbare Komplexe ($\Delta(J)$ ist schälbar, vgl. die

Bemerkungen am Ende von §12) bewiesen.

Satz. Sei Δ der Standardkomplex der endlichen Coxetergruppe (W,S) mit $|S|=|I|\geq 2$. Sei $J\subseteq I$ mit $|J|\geq 2$. Dann gilt:

(i) $H_0(\Delta(J)) = \mathbb{Z}$;

(ii) $H_k(\Delta(J)) = 0$ für $1 \leq k \leq \ell_J-1$,

(iii) $H_{\ell_J}(\Delta(J)) \neq 0$.

Beweis. (i) und (iii) folgen aus der Vorbemerkung. Es bleibt (ii) zu zeigen. Wegen $W_I = 1$ können wir die Kammern von Δ mit den Elementen von W gleichsetzen. Es ist dann $d(1,w) = l(w)$. Sei $(K,x)\in\Delta$. Es ist $\text{cham stern}_\Delta(K,x) = W_K x$. Nach (9.1)(iv) enthält $W_K x$ ein eindeutig bestimmtes Element $m(K,x)$ minimaler Länge. Wir setzen

$$M(\Delta(J)) := \{(J,x) \in \text{cham } \Delta(J) \mid \text{es existiert } y\in W_J x \text{ mit } l(w_i y) < l(y) \text{ für alle } i\in J\},$$

$$\Delta(J)^* := \Delta(J) - M(\Delta(J)),$$

$$\Delta(J)^*_n := \{(K,x)\in\Delta(J)^* \mid l(m(K,x)) \leq n\},\ n\in\mathbb{N}.$$

(a) Jedes Simplex der Dimension ℓ_J-1 von $\Delta(J)$ liegt in $\Delta(J)^*$.

Sei $(J-\{i\},x)$ ein Simplex der Dimension ℓ_J-1 von $\Delta(J)$. Setze $m:=m(J-\{i\},x)$. Dann ist $(J,m) \in \text{cham } \Delta(J) \cap \text{stern}_\Delta(J-\{i\},x)$. Wir zeigen, daß $(J,m) \notin M(\Delta(J))$ ist. Angenommen $(J,m) \in M(\Delta(J))$.

Dann existiert ein $y \in W_J m$ mit $l(w_i y) < l(y)$ für alle $i \in J$. Es ist $W_J y \cap W_{J-\{j\}} x = \langle w_j \rangle y$ wegen $W_{J-\{j\}} x = W_{J-\{j\}} m = W_{J-\{j\}} y$. Folglich gilt $w_j y m^{-1} \in W_{J-\{j\}}$. Sei $w_{i_1} \ldots w_{i_r}$ eine reduzierte Darstellung von $w_j y m^{-1}$. Also ist $w_j w_{i_1} \ldots w_{i_r}$ eine reduzierte Darstellung von $y m^{-1}$. Nach (9.1)(v) gilt

$$\{w_j, w_{i_1}, \ldots, w_{i_r}\} \subseteq W_J = \langle w_k \mid k \in J \rangle,$$

ein Widerspruch.

(b) Sei $(J,x) \in \text{cham } \Delta(J)^*_n - \text{cham } \Delta(J)^*_{n-1}$. Jedes Simplex von $\mathbb{P}(J,x) \cap \Delta(J)^*_{n-1}$ liegt in einem Simplex der Dimension $\ell_J - 1$ in $\mathbb{P}(J,x) \cap \Delta(J)^*_{n-1}$.

Sei $(K,x) \in \mathbb{P}(J,x) \cap \Delta(J)^*_{n-1}$. Dann ist $l(m(K,x)) < n$. Da $m(J,x) \in W_K m(K,x)$ ist, gibt es eine reduzierte Darstellung $m(J,x)m(K,x)^{-1} = w_{i_1} \ldots w_{i_r} \in W_k$, $r = n - l(m(K,x))$. Nach (10.1)(v) liegt $y = w_{i_1} \ldots w_{i_r} \cdot m(k,x)$ im Stern von (K,x) und ist benachbart zu $m(J,x)$, wobei $l(y) = n-1$ ist. Folglich sind (J,x) und (J,y) verschieden, aber benachbart. $\mathbb{P}(J,x) \cap \mathbb{P}(J,y)$ ist das gesuchte Simplex.

(c) Sei $(J,x) \in \text{cham } \Delta(J)^*_n - \text{cham } \Delta(J)^*_{n-1}$. (J,x) enthält eine Seite, die nicht in $\Delta(J)^*_{n-1}$ liegt.

Angenommen jede echte Seite von (J,x) liegt in $\Delta(J)^*_{n-1}$. Sei $(J-\{j\},x) =: (J_o,x)$ eine Seite von (J,x). Es ist $l(m(J_o,x)) < n$. Sei $w_{i_1} \ldots w_{i_r} = m(J,x)m(J_o,x)^{-1}$ eine reduzierte Darstellung in W_{J_o}. Setzen wir

$y := w_{i_2} \cdot \ldots \cdot w_{i_r} \cdot m(J_o,x)$ so gilt wie unter (b) $l(y)=n-1$. Folglich sind wiederum (J,x) und (J,y) benachbart, aber verschieden, d.h. $xy^{-1} \in W_{J_o} - W_J$. Es ist also $y = w_j m(J,x)$. Die gleiche Argumentation geht für jede Seite der Dimension $\ell_J - 1$ von (J,x), d.h. es ist $l(w_j m(J,x)) < l(m(J,x))$ für alle $j \in J$. Also gilt $(J,x) \in M(\Delta(J))$, ein Widerspruch.

(d) Sei $(J,x) \in \text{cham } \Delta(J)^*_n - \text{cham } \Delta(J)^*_{n-1}$. Dann ist $\mathbb{P}(J,x) \cap \Delta(J)^*_{n-1}$ sternförmig. Sei $(J-\{j\},x)$ eine nach (c) existierende Seite von (J,x), die nicht in $\Delta(J)^*_{n-1}$ liegt. Die gegenüberliegende Ecke $(\{j\},x)$ liegt in jeder weiteren Seite der Dimension $\ell_J - 1$ von (J,x). Mit (b) folgt die Behauptung.

(e) Seien (J,x) und (J,y) Elemente von $\text{cham } \Delta(J)^*_n - \text{cham } \Delta(J)^*_{n-1}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(I,x) \cap \mathbb{P}(J,y) \subseteq \Delta(J)^*_{n-1}.$$

Setze $(K,z) = (J,x) \cap (J,y)$. Es ist $m(J,x)$ ebenso wie $m(J,y)$ ein Element von $W_K z$ der Länge n. Nach (9.1)(iv) ist $m(K,z)$ eindeutig bestimmt. Folglich muß $l(m(K,z)) < n$ sein.

(f) Es ist $H_k(\Delta(J)^*) = 0$ für $1 \le k \le \ell_J - 1$.

$\Delta(J)^*_n$ entsteht aus $\Delta(J)^*_{n-1}$ durch Vereinigung mit endlich vielen Komplexen $\mathbb{P}(J,x)$. Wegen $\Delta(J)^*_o = \mathbb{P}(J,1)$ folgt die Behauptung induktiv durch Anwendung von Lemma (3.8) unter Beachtung von (e).

Die Aussage (ii) folgt nun aus (a) und (f). □

In (11.5) werden wir eine Basis für $H_{\ell_J}(\Delta(J))$ angeben. Dabei wird die geometrische Bedeutung der Elemente von $M(\Delta(J))$ klar werden.

(9.4) Seien die Bezeichnungen wie in (9.3). Wir können jetzt die Charaktere der QW-Moduln $H_{\ell_J}(\Delta(J),Q)$ angeben. Die Resultate sind von Solomon [21],[22]. Für $J=I$ geht er vor wie hier; für $J \neq I$ zeigt Solomon die Existenz der Charaktere mit rein algebraischen Methoden. Der Vorteil unseres Vorgehens liegt darin, daß der Darstellungsmodul ebenfalls konstruiert wird.

Satz (Solomon [21],[22]). Sei $\alpha_J = \mathrm{ch}(H_{\ell_J}(\Delta(J),Q))$. Es gilt:

$$\alpha_J = \sum_{K \subseteq J} (-1)^{|J-K|} 1_{W_K}^W.$$

Beweis. Wegen Satz (9.3) ist der Lefschetzcharakter

$$\lambda_{\Delta,Q} = 1 + (-1)^{\ell_J} \alpha_J.$$

Andererseits gilt mit der Spurformel von Hopf-Lefschetz (5.3)

$$\lambda_{\Delta,Q} = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq J} (-1)^{|K|+1} 1_{W_K}^W.$$

Mit der Konvention $G_\emptyset = G$ folgt die Behauptung. □

Für den Charakter $\alpha := \alpha_I$ von W auf $H_\ell(\Delta,Q)$ gilt nach (8.4) außerdem:

$$\alpha(w) = (-1)^{l(w)}.$$

Die Charaktere α_J sind im allgemeinen nicht irreduzibel. Solomon hat in [25]aber gezeigt, daß der reguläre Charakter von W gleich der Summe $\sum_{J\subseteq I} \alpha_J$ ist ($\alpha_\emptyset = 1$, $\alpha_{\{i\}} = 1_{W_i}^W - 1$). Ferner beweist Solomon die interessante Charakterformel

$$\alpha_J = \alpha\alpha_{\bar{J}}\ ,\ J\subseteq I \text{ (Konvention } \alpha_\emptyset = 1).$$

§ 10 Komplexe der Dimension 2

In diesem Paragraphen wollen wir eine Charakterisierung der endlichen Coxeterkomplexe der Dimension 2 geben (vgl. (10.3)).

(10.1) Sei $\Delta = \Delta(W,(W_i)_{i\in I})$ Standardkomplex einer Coxetergruppe vom Rang $\ell+1 \geq 2$. Aufgrund von Satz (9.3) gilt dann für die Eulercharakteristik von Δ

$$\chi(\Delta) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \ell \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$, $I = \{0,1,2\}$, ein endlicher Gruppenkomplex der Dimension 2 mit Eulercharakteristik $\chi(\Delta) = 2$. Dann tritt einer der beiden Fälle ein:

(a) G_I ist ein Normalteiler von G mit Index 2, insbesondere ist $G_i = G(i) = G_I$, $i\in\{0,1,2\}$. Δ ist der "ausgeartete" Komplex, der aus zwei disjunkten Simplices der Dimension 2 besteht.

(b) Δ ist stabil und für mindestens ein $i\in I$ ist $|G(i):G_I| = 2$. Sei so numeriert, daß $|G(0):G_I|=2$ und $|G(1)|\leq|G(2)|$ ist. Dann ist entweder $|G(1):G_I|=2$ oder $|G(1):G_I|=3$, und im letzteren Fall gilt $|G(2):G_I|\leq 5$.

Beweis. Sei zunächst $G_i=G_I$ für alle $i = 0,1,2$. Wegen

$$2 = \chi(\Delta) = |G:G_I| - 3|G:G_I| + 3|G:G_I| = |G:G_I|,$$

ist G_I ein Normalteiler von G mit Index 2. Dies liefert den ausgearteten Komplex unter (a). Weiterhin sei $|\{G_o,G_1,G_2\}| \geq 2$. Wir zeigen zunächst, daß Δ stabil ist. Wäre $G_i=G$ für mindestens ein $i\varepsilon I$, so wäre Δ sternförmig und damit $\chi(\Delta)=1$ ((3.8), Beispiel 2). Also ist $G_i \neq G$ für $i = 0,1,2$. Sei nun etwa $G_o = G_1 = H \neq G_2$. Dann ist $G(2) \supseteq H$ und $G(0) = G(1) = G_I =: H_1$. Damit

$$\begin{aligned} 2 = \chi(\Delta) &= |G:H_1| - 2|G:H_1| - |G:H| + 2|G:H| + |G:G_2| \\ &= |G:H| + |G:G_2| - |G:H_1|. \end{aligned}$$

Wegen $H \neq H_1 \neq G_2$ sind $|G:H|$, $|G:G_2| \leq |G:H_1|/2$, ein Widerspruch. Wir können also annehmen, daß alle G_i, $i\varepsilon I$, verschieden sind. Sei nun $G(i)=H$, $i = 0,1,2$. Dann ist auch $G_I = H$ und es gilt

$$\begin{aligned} 2 = \chi(\Delta) &= |G:H| - 3|G:H| + \sum_i |G:G_i| \\ &= \sum_i |G:G_i| - 2|G:H|. \end{aligned}$$

Wegen $|G:G_i| \leq |G:H|/2$ folgt der Widerspruch. Der Fall $G(i) = G(j)$ für $i \neq j$ erledigt sich analog. Damit ist gezeigt, daß Δ stabil ist.

Wir zeigen als nächstes, daß $|G(i):G_I| = 2$ gilt für mindestens ein $i\varepsilon I$. Angenommen $|G(i):G_I| \geq 3$ für alle $i\varepsilon I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi(\Delta) = 2 &= \sum_i |G:G_i| - \sum_i |G:G(i)| + |G:G_I| \\ &\geq \sum_i |G:G_I| - |G:G_I| + |G:G_I| = \sum_i |G:G_I| \geq 6, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Im folgenden können wir o.B.d.A. $|G(0):G_I|=2$ annehmen. Wir setzen ferner $x:=|G(1):G_I|$, $y:=|G(2):G_I|$ und $g:=|G:G_I|$ (beachte $x,y\geq 2$, $g\geq 6$). Dann gilt

$$\chi(\Delta) = 2 = \sum_i |G:G_i| - g/2 - g/x - g/y + g$$
$$= \sum_i |G:G_i| + g/2 - g/x - g/y.$$

Folglich $((2y + 2x + xy)/2xy)g = \sum |G:G_i| - 2 \geq 4$. (F)

Aus Gleichung (F) folgen die beiden Ungleichungen

$$(2-x)y + 2x > 0 \qquad (*)$$

und $$(2-y)x + 2y > 0. \qquad (**)$$

Wir können etwa $x\leq y$ annehmen. Ist $x<y/2$, so folgt mit (*)

$$x=2 \text{ und } y>4.$$

Ist $y/2 \leq x\leq y$, so folgt mit (**) $2-y > -4$, also

$$y < 6.$$

Es ist also $(x,y)\in\{(3,5),(4,5),(5,5),(2,4),(3,4),(4,4),(2,3),(3,3),(2,n), 5\leq n\in\mathbb{N}\}$. Einsetzen in (F) zeigt daß (4,5),(5,5) und (4,4) nicht möglich sind. □

Folgerung. Sei K ein Hauptidealring der Charakteristik 0. Ist $\chi(\Delta) = 2$ und ist rang $H_2(\Delta,K) = 1$, also $H_1(\Delta,K) = 0$, so gilt (evtl. nach Umnumerierung)

$$|G(0):G_I| = 2 = |G(1):G_I| \text{ und } |G(2):G_I| = 2k$$

für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach Satz (8.2)(c) gilt $2 \mid |G(i):G_I|$ für $i = 0,1,2$. Mit dem vorangehenden Satz ergibt sich die Behauptung. □

(10.2) Ist (W,S) eine endliche Coxetergruppe vom Rang 3, so existieren stets zwei vertauschbare Involutionen $w_i \neq w_j$, d.h. $W_i = V_4$ (Kleinsche Vierergruppe) für mindestens ein $i \in \{0,1,2\}$.

Satz 1. Sei $\Delta = \Delta(G, (G_i)_{i \in I})$ ein endlicher, stabiler Gruppenkomplex der Dimension 2 mit $\chi(\Delta) = 2$. Ist $|G_i:G_I| = 4$ für mindestens ein $i \in I$, so ist Δ dünn oder es gilt bei geeigneter Numerierung $|G(0):G_I| = 2$, $|G(1):G_I| = 2$ und $|G(2):G_I| = 3$, und es tritt einer der folgenden Fälle ein:

(i) $|G:G_I| = 360$, $(|G:G_0|, |G:G_1|, |G:G_2|) = (20, 12, 120)$,
(ii) $|G:G_I| = 144$, $(|G:G_0|, |G:G_1|, |G:G_2|) = (8, 6, 38)$,
(iii) $|G:G_I| = 72$, $(|G:G_0|, |G:G_1|, |G:G_2|) = (4, 4, 18)$.

Beweis. Sei Δ nicht dünn. Dann können wir o.B.d.A. $|G(0):G_I| = 2 = |G(1):G_I|$, d.h. $|G_2:G_I| = 4$ annehmen. Wir setzen $k := |G(2):G_I|$, $(k \geq 3)$. Dann gilt $|G_0:G_I| \geq 2k \leq |G_1:G_I|$. Setzen wir außerdem $g_0 := |G:G_0|$, $g_1 := |G:G_1|$ und $g := |G:G_I|$, so erhalten wir mit der Eulercharakteristik

$$\chi(\Delta) = 2 = g - g/2 - g/2 - g/k + g/4 + g_o + g_1$$
$$= ((k-4)/4k)g + g_o + g_1.$$

Folglich $2 + ((4-k/4k)g = g_o + g_1 \geq 4$. (F)
Also ist k=3. Wegen $\langle G(1), G(2)\rangle \leq G_o$ und $\langle G(0), G(2)\rangle \leq G_1$ gilt $6 \mid |G_o : G_I|$ und $6 \mid |G_1 : G_I|$. Wir setzen $6t_o := |G_o : G_I|$ und $6t_1 := |G_1 : G_I|$. Dann folgt aus (F)

$$2 + g/12 = g/6t_o + g/6t_1.$$

Dies ergibt $2 = ((2(t_o + t_1) - t_o t_1)/12 t_o t_1)g$. (F')
Wie im Beweis von Satz (9.1) ergeben sich mit den Ungleichungen (*) und (**) folgende Möglichkeiten (beachte $t_o = 1$ oder $t_1 = 1$ ist nicht von vornherein auszuschließen) unter der Voraussetzung $t_o \leq t_1$

$$(t_o, t_1) \in \{(3,5),(4,5),(5,5),(4,4),(3,3),$$
$$(2,n),\ 2 \leq n \in \mathbb{N}, (1,n),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Einsetzen in Gleichung (F') und Berücksichtigung von $6 \cdot t_j \mid g$, j=0,1, zeigt, daß die Paare (1,n), (4,5) und (5,5) nicht auftreten können. Wäre $(t_o, t_1) = (2,n)$, so wäre $g = 12n$ und somit $|G : G_1| = 2$. Folglich wäre $|G_o : G_1 \cap G_o| = |G_o : G(2)| = 2$, also $|G : G_o| = g/6$. Andererseits ist aber $|G : G_o| = g/6t_o = g/12$, ein Widerspruch. Es bleiben nur die folgenden Möglichkeiten übrig:

$$(t_o, t_1) \in \{(3,5),(3,4),(3,3)\}.$$

Aus Gleichung (F') folgt dann g = 360, 144, 72, respektive. □

Es ist mir nicht gelungen, die drei Ausnahmekomplexe zu konstruieren. Die Frage nach ihrer Existenz bleibt offen.

Der vorangehende Satz besitzt eine partielle Umkehrung.

Satz 2. Sei $\Delta = \Delta(G_i)_{i\in I})$, $I = \{0,1,2\}$ ein endlicher, stabiler Gruppenkomplex mit $\chi(\Delta) = 2$. Ist Δ dünn, so ist $|G_i : G_I| = 4$ für mindestens ein $i \in I$.

Beweis. Angenommen $|G_i : G_I| > 4$ für alle $i \in I$. Da Δ dünn ist, ist dann $|G_i : G_I| \geq 6$ für alle $i \in I$ und es gilt

$$\begin{aligned} \chi(\Delta) = 2 &= |G:G_I| - 3|G:G_I|/2 + \sum_i |G:G_i| \\ &= \sum_i |G:G_i| - |G:G_I|/2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

(10.3) Wir geben nun eine Charakterisierung für Coxeterkomplexe der Dimension 2.

Satz. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$, $I = \{0,1,2\}$ ein 2-dimensionaler endlicher Gruppenkomplex. Genau dann ist Δ ein Coxeterkomplex, wenn $\chi(\Delta) = 2$ und $\operatorname{rang} H_1(\Delta_J, K) = 1$ ist für jede Teilmenge $J \subseteq I$, $|J| = 2$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt unmittelbar aus der Schlußbemerkung von (9.2) und Satz (9.3).

Sei nun umgekehrt $\chi(\Delta) = 2$ und rang $H_1(\Delta_J,K) = 1$ für $J \subsetneq I$, $|J|=2$. Der Fall (a) in Satz (10.1) kann nicht eintreten, also ist Δ stabil. Setzen wir $J = \{i,j, i \neq j\}$, $\bar{J} = \{k\} \subseteq I$, so gilt $\Delta_J = \Delta(G_k,(G(i),G(j)))$. Wegen (8.2), Beispiel , ist dann $|G(i):G_I| = 2 = |G(j):G_I|$ und $G_k/G_I = \langle G(i),G(j)\rangle/G_I$ eine endliche Diedergruppe, Δ_J ihr Standardkomplex. Folglich ist Δ dünn. Setzen wir $\bar{G} := \langle G(i) | i \in I\rangle$, so ist $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{G},(G_i \cap \bar{G})_{i \in I})$ ein dünner Gruppenkammerkomplex, und es ist rang $H_2(\Delta,K) = |G:\bar{G}|$ rang $H_2(\bar{\Delta},K)$ nach Satz (4.3). Wegen $\chi(\Delta) = 2$ und rang $H_2(\Delta,K) \leq 1$ (Satz (8.3)) ist $\bar{\Delta}=\Delta$ und Δ ist ein Gruppenkammerkomplex. Δ ist obendrein umkehrbar.

Im folgenden wollen wir o.B.d.A. $G_I = 1$ voraussetzen (Δ ist dünn!). Wegen Satz 2 in (10.2) ist $|G_i| = 4$ für mindestens ein $i \in I$. Sei etwa $|G_o|=4$. Setzen wir $g=|G|$, so erhalten wir für die Eulercharakteristik

$$\chi(\Delta) = 2 = g - 3g/2 + g/4 + |G:G_1| + |G:G_2| = |G:G_1| + |G:G_2| - g/4. \qquad (*)$$

(a) Ist $|G_i| = 4$ für $i \neq 0$, so ist $G = Z_2 \times D_{2n}$, $n \geq 2$. Sei etwa $|G_1|=4$. Dann ist $G_1 = \langle G(0),G(2)\rangle$ eine Vierergruppe und wegen $G_o = \langle G(1),G(2)\rangle$ ist $G(2) \leq Z(G)$. Also ist $G(2)G_2 = G = G(2) \times G_2$. Da $G_2 = \langle G(0),G(1)\rangle$ eine Diedergruppe ist, folgt die Behauptung.

Im folgenden sei stets $|G_1| > 4 < |G_2|$.

(b) Es gilt $|G_i| \leq 10$ für $i = 1,2$.

Angenommen $|G_i| > 10$, d.h. $|G_1| \geq 12$. Dann ergibt sich mit (*)

$$2 \leq g/12 + g/|G_2| - g/4,$$

folglich $g/6 + 2 \leq g/|G_2|$.

Also $|G_2| \leq 4$, ein Widerspruch.

(c) Ist $|G_1| = |G_2|$, so ist $G \cong \mathrm{Sym}(4)$.

Setze $x := |G:G_1| = |G:G_2|$. Gleichung (*) liefert dann

$$g/4 + 2 = 2x$$

$$x = (g+8)/8. \qquad (**)$$

Wegen $x|g$ und $6 \leq |G_1|, |G_2| \leq 10$ existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq k \leq 5$ und $2kx = g$. Einsetzen in (**) ergibt

$$k = 4g/(g+8).$$

Folglich ist $k=3$ und $g=24$. Sei W die Coxetergruppe vom Rang 3 mit $m_{ij} = |G_k|$, $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$ (vgl. (9.1)). Dann ist $W \cong \mathrm{Sym}(4)$. Da G homomorphes Bild von W ist, ist aus Ordnungsgründen $G \cong \mathrm{Sym}(4)$.

(d) Ist $|G_1| \neq |G_2|$ und $|G_1| = 6$, so ist $G = C_3$ oder H_3 (Coxetergruppen des entsprechenden Typs). Nach (b) kommt nur $|G_2| = 8,10$ in Frage. Sei zunächst $|G_2| = 8$. Dann ergibt sich mit (*)

$$2 = g/6 + g/8 - g/4$$

$$= g/24.$$

Ist W die Coxetergruppe vom Rang 3 mit $m_{ij}=|G_k|$, $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$, so ist $W = C_3 \cong Z_2^{(3)} \times \mathrm{Sym}(3)$. G ist homomorphes Bild von W, also aus Ordnungsgründen $W \cong G$.

Ist $G_2 = 10$, so ergibt sich mit (*)

$$g = 120.$$

Wie in den beiden vorangehenden Fällen kann geschlossen werden, daß G isomorph zur "passenden" Coxetergruppe, also $G \cong H_3 \cong Z_2 \times \mathrm{Alt}(5)$ ist.(Beachte, daß die zentrale Untergruppe keinem G(i) entspricht!) □

Es ist eine offene Frage, ob die folgende Aussage richtig ist:

> Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein endlicher Gruppenkomplex der Dimension $\ell=|I|-1 \geq 2$. Genau dann ist Δ isomorph zum Standardkomplex einer Coxetergruppe, wenn für alle $J\subseteq I$, $|J|\geq 2$, $H_k(\Delta_J,K) = 0$ für $1\leq k\leq \ell_J-1$ und rang $H_{\ell_J}(\Delta_J,K) = \mathrm{rang}\, H_0(\Delta_J,K) = 1$ ist.

Lemma (8.1) angewandt auf die Komplexe Δ_J zeigt, daß Δ_J ein Kammerkomplex ist für alle $J\subseteq I$, $|J|>2$. Folglich ist Δ umkehrbar. Sei $K = \{i,j\}\subseteq I$. Dann ist also $G_K = \langle G(i),G(j)\rangle$. Nach Beispiel (8.2) ist Δ_K Standardkomplex der Diedergruppe G_K. Somit ist Δ dünn und wir können o.B.d.A. $G_I=1$ annehmen. Sei $G(i)=\langle x_i\rangle$, $i\in I$. Setze $m_{ij}= o(x_ix_j)$ für $i,j\in I$. Es bleibt zu zeigen,daß

$\{(x_i x_j)^{m_{ij}} = 1 \mid i,j \in I\}$ definierende Relationen für G sind.

(10.4) Wir beschließen den Paragraphen mit einer Folgerung aus Satz (10.3).

Satz. Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$, $I = \{0,1,2\}$ ein endlicher Gruppenkomplex der Dimension 2. Genau dann ist Δ ein Coxeterkomplex, wenn Δ dünn und $H_2(\Delta,K) \neq 0$ sowie $H_1(\Delta,K) = 0$ ist (dabei sei K Hauptidealring).

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus (9.2) und Satz (9.3). Sei umgekehrt Δ dünn und $H_2(\Delta,K) \neq 0 = H_1(\Delta,K)$. Wegen rang $H_2(\Delta,K) = 1$ (8.3) ist Δ ein stabiler Gruppenkammerkomplex. Da Δ dünn ist, können wir o.B.d.A. $G_I = 1$ annehmen. Es gilt für die Eulercharakteristik $\chi(\Delta) = 2$. Nach Satz 2 in (10.2) können wir außerdem $|G_o| = 4$ annehmen. Wir erhalten

$$\chi(\Delta) = 2 = |G| - 3|G|/2 + |G|/4 + |G:G_1| + |G:G_2|$$
$$= |G:G_1| + |G:G_2| - |G|/4.$$

Dies ist gerade Gleichung (*) im Beweis des Satzes (10.3). Wir können die dortigen Rechnungen übertragen. Damit sind die Ordnungen der G_i, $i\in I$ festgelegt. Es bleibt zu zeigen, daß $G_i = \langle G(j),G(k)\rangle$ für alle $i\in I$ gilt (beachte $G = \langle G(i) \mid i\in I\rangle$).
Ist zusätzlich $|G_i| = 4$ für $i=1$ oder $i=2$, so ist z.B. $G = G(2) \times \langle G(1),G(0)\rangle$ nach (a) im Beweis von

(10.3) und wir sind fertig. Wir können also annehmen, daß keine der Gruppen G(i) im Zentrum von G liegt. Die möglichen Ordnungen von G_1, G_2 sind dann (mit $|G_1| < |G_2|$):

$$(|G_1|,|G_2|) \in \{(6,6),(6,8),(6,10)\}.$$

Es gibt aber keine Gruppen dieser Ordnung, die als echte Untergruppen Diedergruppen der Ordnung größer 4 enthalten. □

Es ist nicht klar, ob die Bedingungen von Satz (10.4) (Δ dünn, $H_k(\Delta,K) = 0$ für $1 \leq k \leq \ell-1$ und $H_\ell(\Delta,K) \neq 0$) schon genügen um Coxeterkomplexe höherer Dimension zu charakterisieren. Die Bedingungen im Satz (10.3) sind etwas schärfer. Sie beinhalten die Dünnheit und die Umkehrbarkeit von Δ.

Ich konnte auch nicht klären, ob man allein durch Forderungen an die Homologie eines Gruppenkomplexes schließen kann, daß dieser dünn ist.

§11 Wohnungen

In diesem Paragraphen wollen wir eine Beziehung zwischen der Tophomologie eines Gruppenkomplexes und den geometrischen Bausteinen des Komplexes, den sogenannten Wohnungen, herstellen. Ein Verfahren, das die Konstruktion von Wohnungen erleichtert, wird beschrieben. Als Anwendung berechnen wir die Wohnungen der Komplexe A bis D aus (6.3). In (11.5) geben wir eine Basis für $H_{\ell_J}(\Delta(J),\mathbb{Q})$, Δ ein Coxeterkomplex, an. Stets ist in diesem Paragraphen $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein endlicher, stabiler Gruppenkomplex der Dimension ℓ. Wir schreiben abkürzend $H_k(-)$ für $H_k(-,\mathbb{Q}) = H_k(-,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$.

(11.1) Ein dünner Kammerteilkomplex W der Dimension ℓ von Δ heißt Wohnung von Δ, falls $H_\ell(W) \neq 0$ ist. Dies verallgemeinert eine Definition von Tits [34],S.38 für Gebäude (beachte hierzu [34], S.43, Theorem 3.7). Wir werden darauf noch im Paragraphen 12 eingehen. Die Menge aller Wohnungen von Δ bezeichnen wir mit $W:=W(\Delta)$. Ist $\dim \Delta = 1$, so sind die Wohnungen von Δ Kreise gerader Länge. Vielfach sind Wohnungen Coxeterkomplexe (vgl. (11.4),(11.5),§12).

Sei W eine Wohnung von Δ. W ist im allgemeinen kein Gruppenkomplex (in G), besitzt jedoch die von Δ induzierte Färbung (vgl. die Beispiele in (11.4)).

Wir schreiben

$$S_G(W) := \mathrm{Stab}_G(W).$$

Da G auf Δ simplizial operiert, wirkt G auf $\mathcal{W}$ (im allgemeinen nicht transitiv, vgl. (11.5)). Da G transitiv auf cham Δ operiert, gibt es in jeder Bahn von G in $\mathcal{W}$ eine Wohnung durch die Fundamentalkammer. Folglich genügt es, die Wohnungen durch (I,1) und ihre Stabilisatorengruppen zu bestimmen, um alle Wohnungen von Δ konstruieren zu können.

Lemma. Sei $W \in \mathcal{W}$ eine Wohnung von Δ.

(a) Für alle $i \in I$ ist $|\mathrm{cham}\ W| \leq 2|G:G(i)|$. Ferner ist $|\mathrm{cham}\ W|$ gerade.

(b) Sei $W' \in \mathcal{W}$ mit $W' \subseteq W$. Dann ist $W' = W$.

Beweis. (a) Sei $s = (I^i, x)$ ein Simplex der Dimension $\ell-1$ von Δ. Sei $\mathrm{stern}_\Delta s \cap \mathrm{cham}\ W \neq \emptyset$. Da W dünn ist, ist dann $|\mathrm{stern}_\Delta s \cap \mathrm{cham}\ W| = 2$. Wegen $\mathrm{cham}\ \Delta = \bigcup_{x \in R_i} \mathrm{stern}_\Delta(I^i, x)$, R_i ein Repräsentantensystem von (Rechts-)Nebenklassen von G über G(i), gilt die Behauptung.

(b) Sei $W' \neq W$. Dann existiert ein $c \in \mathrm{cham}\ W - \mathrm{cham}\ W'$. Da W und W' dünn sind, kann es keine Folge paarweise benachbarter Kammern geben, die c mit einer Kammer aus W' verbindet, ein Widerspruch. □

Folgerung. Ist Δ ein dünner Gruppenkomplex mit $H_\ell(\Delta) \neq 0$, so ist $\mathcal{W}=\{\Delta\}$.

Beweis. Per definitionem ist $\Delta\in\mathcal{W}$. Aus der Minimalitätseigenschaft (Lemma (b)), folgt die Behauptung. □

(11.2) Sei weiterhin W eine Wohnung in Δ. Da W dünn ist, kann man wie in (8.3) auf rang $H_\ell(W)=1$ schließen. Sei h(W) ein erzeugendes Element von $H_\ell(W)$. Wie im Beweis von Satz (8.3) folgt

$$h(W) = \sum_{x\in cham\ W} \alpha(x)x,$$

mit $\alpha(x)\in\{\pm 1\}$, wobei h(W) bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Wir können h(W) als Element von $H_\ell(\Delta)$ auffassen (via Einbettung von W in Δ). Der QG-Modul

$$St(\Delta) := \langle h(W) \mid W\in\mathcal{W}\rangle_Q$$

ist ein Untermodul von $H_\ell(\Delta)$ und heißt Steinbergmodul von Δ.

In vielen Fällen ist $H_\ell(\Delta) = St(\Delta)$, z.B., falls Δ ein Coxeterkomplex, ein Gebäude (hier finden wir den "klassischen" Steinbergmodul wieder, vgl. §12) oder ein abgeleiteter Komplex von ihnen ist (vgl. (11.5) und §12). Das gleiche gilt, falls Δ einer der Komplexe in (6.3) ist. Ist Γ eine Geometrie,

so wird in der Literatur auch $H_\ell(\Gamma) = H_\ell(\Delta(\Gamma))$ als Steinbergmodul bezeichnet (vgl. Ott[17],[18]) Wäre $H_\ell(\Delta) = St(\Delta)$ in allen Fällen, so würde insbesondere folgen:

Ist rang $H_\ell(\Delta) = 1$, so ist Δ dünn.

(In §8 haben wir gesehen, daß Δ unter dieser Voraussetzung "fast" dünn ist.)

Sei $\Omega = \{Wx \mid x \in G\}$ eine Bahn in $\mathcal{W}$. Dann ist

$$h(\Omega) := \langle h(Wx) = h(W)x \mid x \in G \rangle$$

ein QG-Teilmodul von $St(\Delta)$ (und $H_\ell(\Delta)$). In den mir bekannten Beispielen existiert immer eine Bahn in $\mathcal{W}$, deren Wohnungen $St(\Delta)$ (bzw. $H_\ell(\Delta)$) erzeugen. Das gilt jedoch nicht für jede Bahn (vgl. (11.4)). Ist $St(\Delta)$ irreduzibel, so ist $h(\Omega) = St(\Delta)$ für jede Bahn Ω von G in $\mathcal{W}$. Der umgekehrte Schluß ist nicht richtig, wie Beispiel (3) in (6.2) zeigt. Hier ist $G = Sym(4)$ transitiv auf $\mathcal{W}$, aber $H_\ell(\Delta)$ ist nicht irreduzibel.

(11.3) Für die Konstruktion von Wohnungen ist es nützlich ihre Struktur genauer zu untersuchen. Dazu führen wir einige Begriffe ein.

Seien (I,x) und (I,y) Kammern von Δ. Sind (I,x) und (I,y) benachbart vom Typ $I^i = I-\{i\}$

für ein $i \in I$ (vgl. (4.1)), so schreiben wir abkürzend (I,x) und (I,y) sind <u>(i)-benachbart</u>. Sei $\emptyset \neq J \subseteq I$. (I,x) und (I,y) heißen <u>J-verbunden</u>, falls es eine Folge von Kammern gibt

$$(I,x) = c_0, c_1, \ldots, c_n = (I,y)$$

derart, daß zu $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ ein $i_k \in J$ existiert mit c_k (i_k)-benachbart zu c_{k+1}. J-Verbundensein definiert eine Äquivalenzrelation (J-Zusammenhangskomponenten) auf cham Δ. Ist $J = \{i\}$, so besteht eine Äquivalenzklasse gerade aus den Kammern im Stern eines Simplex der Dimension ℓ-1 vom Typ I-{i}. Die I-Zusammenhangskomponenten sind genau die Zusammenhangskomponenten von Δ(vgl. §4).

Es bezeichne $Z_J(\Delta) := \{(I,x) \in \text{cham } \Delta \mid (I,x)$ J-verbunden mit $(I,1)\}$ und $D := \{i \in I \mid |G(i):G_I| = 2\}$.

<u>Lemma 1</u>. (a) $Z_J(\Delta) = \{(I,x) \in \text{cham } \Delta \mid x \in \langle G(j) \mid j \in J \rangle\}$.

(b) Sei $W \in \mathcal{W}$, $D \neq \emptyset$ und sei R ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von $G(D) := \langle G(i) \mid i \in D \rangle$ in G. Dann ist $\text{cham } W = \dot{\bigcup}_{r \in S} Z_D(\Delta)r$ für eine geeignete nichtleere Teilmenge S von R. Insbesondere gilt:

$$|G(D)/G_I| \mid |\text{cham } W|.$$

<u>Beweis</u>. (a) Der Beweis geht analog zum Beweis von Satz (4.2).

(b) Nach (a) ist $\text{cham } \Delta = \dot{\bigcup}_{r \in R} Z_D(\Delta)r$. Sei $c \in \text{cham } W$. Dann ist $c \in Z_D(\Delta)s$ für geeignetes $s \in R$. Da W ein dünner Kammerkomplex ist, folgt

$$Z_D(\Delta) \subseteq \text{cham } W$$

nach Definition von D. Die Teilbarkeitsbeziehung ergibt sich nun mit (a). □

Ist Δ ein dünner Gruppenkammerkomplex, so ist $Z_D(\Delta) = \text{cham } \Delta$. Ist jedoch Δ nicht dünn, so enthält jede Wohnung mindestens 2 vollständige D-Zusammenhangskomponenten.

Wir wollen die J-Zusammenhangskomponenten benützen, um Wohnungen zu konstruieren. Also benötigen wir echte Teilmengen von $Z_J(\Delta)$, falls ein $j \in J$ existiert mit $|G(j):G_I| \geq 3$. Diese Teilmengen nennen wir J-Kreise. Zunächst benötigen wir noch eine weitere Definition. Sei $K \subseteq \text{cham } \Delta$ und seien $a,b \in K$ J-verbunden. Es bezeichne $d_{K,J}(a,b)$ die Länge n der kürzesten Folge $a=c_0,..,c_n=b$ von Kammern aus K, die a mit b J-verbindet. Dann ist $d(a,b) := d_{\text{cham}\Delta,I}(a,b)$ die übliche Abstandsfunktion auf cham Δ (vgl. Tits[34], S.4). $K \subseteq \text{cham } \Delta$ heißt <u>J-Kreis</u>, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) K ist J-zusammenhängend;

(ii) Zu jedem $x \in K$ und jedem $j \in J$ gibt es genau ein von x verschiedenes Element $y_j(x) \in K$, das (j)-benachbart zu x ist;

(iii) Es existiert ein $z \in K$, so daß für alle benachbarten Kammern $x \neq y$ in K gilt: $d_{K,J}(x,z) \neq d_{K,J}(y,z)$.

Ein {i}-Kreis ist ein Paar (i)-benachbarter Kammern. Ist $|J|=2$, so ist der Graph mit der Eckenmenge K und Kantenmenge {Paare J-benachbarter Elemente von K} ein Kreis gerader Länge. Ein D-Kreis ist eine vollständige D-Zusammenhangskomponente $Z_D(\Delta)x$ für ein geeignetes $x \in G$. I-Kreise sind Wohnungen. G operiert auf der Menge der J-Kreise durch Multiplikation von rechts.

Das folgende Lemma zeigt eine Möglichkeit, J-Kreise zu vergrößern.

Lemma 2. Sei K ein J-Kreis durch (I,1) und sei $x \in G(i)\text{-}G_I$ für ein $i \in \bar{J}$.

(a) $K \cup Kx$ ist ein $(J \cup \{i\})$-Kreis, falls $x \in G(i)^g$ für alle $(I,g) \in K$ gilt.

(b) Sei $G_I = 1$. $K \cup xK$ ist ein $(J \cup \{i\})$-Kreis, falls für jedes $j \in J$ und Paare (j)-benachbarter Kammern $(I,g),(I,h)$ von K gilt: $gh^{-1} \in G(j)^x \cap G(j)$.

Insbesondere ist $K \cup Kx$ ein $(J \cup \{i\})$-Kreis, falls $G(J) := \langle G(j) \mid j \in J \rangle \leq N_G(G(i))$; ist $G_I = 1$, so ist $K \cup xK$ ein $(J \cup \{i\})$-Kreis, falls $x \in N_G(G(j))$ für alle $j \in J$ ist.

Beweis. (a) Wegen $i \in \bar{J}$ ist $G(J) := \langle G(j) \mid j \in J \rangle$ Untergruppe von G_i und daher $G(i) \cap G(J) = G_I$. Da nach Voraussetzung $x \in G(i)\text{-}G_I$ ist, können wir mit Lemma 1(a)

auf $(I,x)\in Z_J(\Delta)$ schließen. Wegen $(I,1)\in K$ ist also $Kx \not\subseteq Z_J(\Delta)$. Da K nach Definition (i) J-zusammenhängend ist, folgt $Kx \cap K = \emptyset$. Sei $(I,g)\in K$. Nach Voraussetzung ist $x\in G(i)^g$. Folglich ist (I,g) (i)-benachbart zu (I,gx). Setzt man $L := K \cup Kx$ und $\hat{J} := J\cup\{i\}$, so ist also L $\hat{J}$- zusammenhängend.

Sei $a\in L$. Es ist zu zeigen, daß die (j)-Nachbarn von a in L für alle $j\in\hat{J}$ eindeutig bestimmt sind. Für $j\in J$ ist das klar, da K und Kx in verschiedenen J-Zusammenhangskomponenten liegen. Sei $a\in K$ und es gebe $b\in K$ derart, daß bx (i)-benachbart zu a ist. Dann ist auch ax (i)-benachbart zu bx und a (i)-benachbart zu b. Sei $a=(I,g)$ und $b=(I,h)$ mit $g,h \in G(J) := \langle G(j) \mid j\in J\rangle$ gemäß Lemma 1(a). Dann ist

$$gh^{-1} \in G(i)\cap G(J) \leq G(i)\cap G_J \leq G_I.$$

Also ist $a=b$.

Sei $z\in K$ das nach Bedingung (iii) in der Definition von J-Kreisen existierende "zentrale" Element von K. Wir zeigen, daß $d_{L,\hat{J}}(z,a) \neq d_{L,\hat{J}}(z,b)$ für beliebige benachbarte $a,b\in L$ gilt. Dazu genügt es zu zeigen:

$$d_{L,\hat{J}}(a,z) = \begin{cases} d_{K,J}(a,z), & \text{falls } a\in K, \\ d_{K,J}(ax^{-1},z)+1, & \text{falls } a\in Kx. \end{cases}$$

Sei $a\in K$ und sei

$$a = c_0, c_1, \ldots, c_n = z$$

eine Folge minimaler Länge von sukzessive (j)-benachbarten Kammern $c_k\in L$ mit $j\in J$, d.h. $d_{L,J}(a,z) = n$.

Angenommen, $d_{L,\hat{J}}(a,z) < d_{K,J}(a,z)$. Dann existiert ein minimales $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ derart, daß c_k, c_{k+1} (i)-benachbart sind. Da $z\in K$ ist, existiert dann auch ein $k'\in\{k+2,\ldots,n-1\}$, für welches $c_{k+1}, c_{k'}$ J-verbunden und $c_{k'}, c_{k'+1}$ (i)-benachbart sind. Dann sind a,z J-verbunden über die Folge

$$a=c_0,c_1,\ldots,c_k,c_{k+2}x^{-1},c_{k+3}x^{-1},\ldots,c_{k'}x^{-1},c_{k'+2},\ldots,c_n=z.$$

Es ist also $d_{K,J}(a,z) < d_{L,\hat{J}}(a,z)$, ein Widerspruch. Wegen $d_{L,\hat{J}}(a,z) \leq d_{K,J}(a,z)$ für alle $a\in K$ folgt:

$$d_{L,\hat{J}}(a,z) = d_{K,J}(a,z), \text{ falls } a\in K.$$

Analog zeigt man $d_{L,\hat{J}}(a,z) = d_{K,J}(a,z) + 1$, falls $a\in Kx$ ist.
(b) Sei $a\in K$. Wegen $x\in G(i)$ ist xa (i)-benachbart zu a. Sei $a=(I,g)$ und sei (I,h) der (j)-Nachbar von a in K. Dann ist $gh^{-1} \in G(j)$. Nach Voraussetzung ist $(xg)(xh)^{-1} = xgh^{-1}x^{-1} \in G(j)$. Folglich ist xK ein J-Kreis. Der Rest folgt wie in (a). □

Ist $J = I-\{i\}$ für ein $i\in I$, so lassen sich Wohnungen i. allg. nicht in nur 2 J-Kreise zerlegen.
Ist J=D , so kann man nach Lemma 1(b) Wohnungen durch Aneinanderfügen von J-Zusammenhangskomponenten (die leicht beschreibbar sind) finden, indem man nachrechnet, ob der konstruierte Teilkomplex noch dünn ist.

(11.4) Beispiele. Im folgenden werden die Wohnungen der Komplexe A-D für G = Sym(4) konstruiert. Für die Bezeichnungen vergleiche (6.3),(6.4), insbesondere

Tabelle 3 für die Numerierung der Kammern $0,1,\ldots,23$ von $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$, $I=\{0,1,2\}$. Folgende Beobachtung ist für die Berechnung der Stabilitätsgruppen von Wohnungen in den Komplexen A-D nützlich:

Sei $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ ein endlicher Gruppenkomplex mit $G_I = 1$. Dann kann cham $\Delta \hat{=} \{x|x\in G\}$ identifiziert werden. Ist W eine Wohnung von Δ, so ist $S_G(W) \subseteq$ cham W.

Komplex A: $(G(0),G(1),G(2)) = (Z_{ac},T_d,V)$.
Sei W eine Wohnung von A. Nach Lemma (11.1) ist $|\text{cham } W| \leq 2|G:V| = 12$. Es ist $G(0) \leq N_G(G(1))$ und $G(0) \leq N_G(G(2))$. Ist K ein $J=\{1,2\}$-Kreis durch die Kammer $0 (=1\in G)$, so ist nach Lemma 2(b) $K\cup(\text{bd})K$ eine Wohnung von A. Es genügt also die J-Kreise durch 0 zu konstruieren. Dies geschieht unter Zuhilfenahme von Tabelle A in (6.3). Wir lassen die (leichten) Rechnungen weg und führen nur die Ergebnisse auf.
Es gibt 2 Bahnen von Wohnungen, bestehend aus 8 Kammern. Wir geben aus jeder Bahn eine Wohnung an:

$$W_1 = \{0,1,4,7,9,11,15,21\},\ W_2 = \{0,2,4,5,8,10,13,22\}.$$

Wegen $S_G(W_1) = \{0,1\}$ besteht $\Omega_1 = \{W_1x|x\in G\}$ aus 12 Wohnungen (4 Wohnungen durch 0) und wegen $S_G(W_2) = \{0,2,5,8\}$ besteht $\Omega_2 = \{W_2x|x\in G\}$ aus 6 Wohnungen (2 Wohnungen durch 0). Jede der Wohnungen in Ω_1 und Ω_2 ist isomorph zum Coxeterkomplex $A_1\times A_1\times A_1$. Es ist

$$h(\Omega_1) = H_2(A) = h(\Omega_2).$$

Es gibt 3 Bahnen von Wohnungen bestehend aus 12 Kammern:

$\Omega_3=\{W_3x \mid x\in G\}$, $\Omega_4=\{W_4x \mid x\in G\}$ und $\Omega_5=\{W_5x \mid x\in G\}$ mit

W_3= {0,1,4,5,6,9,10,12,14,15,18,21},

W_4= {0,2,4,5,6,10,12,14,16,18,20,22}

und W_5= {0,3,4,5,6,8,10,12,13,16,20,23}.

Es ist $S_G(W_3)=\{0,4,5,6,14,15\}$, also $|\Omega_3|=4$

(2 Wohnungen durch 0),

$S_G(W_4)=\{0,6\}$, also $|\Omega_4|=12$ (6 Wohnungen durch 0)

und $S_G(W_4)=\{0,12,13\}$, also $|\Omega_5|=8$ (4 Wohnungen durch 0).

Die Wohnungen in Ω_3, Ω_4 und Ω_5 sind isomorph zum Coxeterkomplex $A_1\times A_2$. Ferner ist

$$h(\Omega_4) = H_2(\mathbb{A}) = h(\Omega_5),$$

aber dim $h(\Omega_3) = 3$ und $h(\Omega_3) \neq H_2(\mathbb{A})$.

Komplex B: $(G(0),G(1),G(2)) = (Z_{cd},T_c,T_d)$.

Sei W eine Wohnung von B. Nach Lemma (11.1) ist $|\text{cham } W| \leq 16$. Wegen $G(0) \leq N_G(G(1))$ und $G(0)\leq N_G(G(2))$ genügt es nach Lemma 2 (b) wie in Beispiel A die {1,2}-Kreise durch 0 zu berechnen. Dann sind die Wohnungen von B bestimmbar. Wir führen wieder nur die Ergebnisse auf.

Es gibt vier Bahnen $\Omega_1,\ldots,\Omega_4$ von Wohnungen mit Repräsentanten $W_1,\ldots,W_4$:

W_1={0,3,4,6,7,11,12,23} ,

W_2={0,2,4,5,6,10,12,14,16,18,20,22},

W_3={0,1,4,5,6,9,10,12,14,15,18,21}

und W_4={0,1,2,3,4,7,8,9,11,13,14,15,18,21,22,23}.

Es ist $S_G(W_1) = \{0,3,6,7\}$, also $|\Omega_1| = 6$;

$S_G(W_2) = \{0,6\}$, also $|\Omega_2| = 12$;

$S_G(W_3) = \{0,5,6,9,14,15\}$, also $|\Omega_3| = 4$

und $S_G(W_4) = \{0,1,22,23\}$ (zyklisch), $|\Omega_4| = 6$.

Die Wohnungen von $\mathbb{B}$ sind Coxeterkomplexe vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$ in Ω_1, $A_1 \times A_2$ in Ω_2 und Ω_3, sowie $G_2^{(4)} \times A_1$ in Ω_4. Es gilt ferner

$$H_2(\mathbb{B}) = h(\Omega_i) \text{ für } i=1,2,4,$$

aber dim $h(\Omega_3) = 3$.

Komplex $\mathbb{C}$: $(G(0),G(1),G(2)) = (Z_{cd}, Z_{(ab)(cd)}, T_d)$. Sei W eine Wohnung von $\mathbb{C}$. Nach Lemma (11.1) ist $|\text{cham } W| \leq 16$. Wie in den beiden vorangegangenen Beispielen ist $G(0) \leq N_G(G(1))$ und $G(0) \leq N_G(G(2))$. Die Wohnungen können folglich wieder über $\{1,2\}$-Kreise durch 0 bestimmt werden. Diese bestehen aus 6 bzw. 8 Elementen. Es gibt zwei Bahnen Ω_1, Ω_2 von Wohnungen mit Repräsentanten W_1, W_2:

$$W_1 = \{0,1,4,5,6,9,10,12,14,15,18,21\},$$
$$W_2 = \{0,1,2,3,4,6,7,9,11,12,15,16,21,22,23\}.$$

Es ist $S_G(W_1) = \{0,5,6,9,14,15\}$, also $|\Omega_1| = 4$ (2 Wohnungen durch 0), $S_G(W_2) = \{0,1,2,3,6,7,20,21\}$, also $|\Omega_2| = 3$ (alle 3 Wohnungen durch 0).

Die Wohnungen von $\mathbb{C}$ sind Coxeterkomplexe von Typ $A_2 \times A_1$ in Ω_1, $G_2^{(4)} \times A_1$ in Ω_2. Es gilt:

$$h(\Omega_1) = H_2(\mathbb{C}) = h(\Omega_2).$$

Komplex $\mathbb{D}$: $(G(0),G(1),G(2)) = (Z_{ad},Z_{cd},V)$
Sei W eine Wohnung von $\mathbb{D}$. Nach Lemma (11.1) ist $|\text{cham } W| \leq 12$. Hier können wir Lemma 2 nicht anwenden. Da im vorliegenden Fall $G_I = 1_G$ ist, ist nach Lemma 1 (b) in (11.3) der $\{0,1\}$-Fundamentalkreis $K := \{(I,x) | x \in \langle Z_{ab}, Z_{cd} \rangle\}$. K besteht aus 6 Elementen. Es ist $\{Ky | y \in V\}$ die Menge der $\{0,1\}$-Kreise von $\mathbb{D}$. Man rechnet leicht nach, daß $Kx \cup Ky$ für $x \neq y \in V$ eine Wohnung von $\mathbb{D}$ ist. Es gibt also 6 Wohnungen in $\mathbb{D}$, die alle in einer Bahn Ω unter G liegen. Eine Wohnung ist z.B.

$$W_1 = \{0,1,4,5,7,9,10,11,15,17,19,21\}.$$

Es ist $S_G(W_1) = \{0,1,4,9\}$ und $h(\Omega) = H_2(\mathbb{D})$.
Die Wohnungen sind Coxeterkomplexe vom Typ $A_2 \times A_1$.

(11.5) Sei $\Delta = \Delta(W,(W_i)_{i \in I})$ Standardkomplex einer endlichen Coxetergruppe (W,S). Wir geben eine Basis von $H_{\ell_J}(\Delta(J))$, $|J| \geq 2$, mit Hilfe von Wohnungen an.
Nach (9.1)(i) ist $\Delta_{\bar{J}} = \Delta(W_{\bar{J}},(W_{\bar{J}} \cap W_i)_{i \in J}) = \text{stern}_{\Delta}(\bar{J},1)$ ein Coxeterkomplex. In (7.2) haben wir gesehen, daß $\Delta_{\bar{J}}$ kanonisch in $\Delta(J)$ eingebettet werden kann. Bezeichnen wir das Bild von $\Delta_{\bar{J}}$ unter dieser Einbettung mit A, so ist A also eine Wohnung von $\Delta(J)$. Das

gleiche gilt für $\text{stern}_\Delta(\bar{J},x)$, $x\in G$, der auf Ax abgebildet wird. Beachtet man, daß die Kammern von Δ mit den Elementen von W identifiziert werden können, so gilt:

$$\text{cham stern}_\Delta(\bar{J},x) = W_{\bar{J}}x.$$

Nach Tits [34], 2.30.6 und 2.36 , existiert ein eindeutig bestimmtes Element $M(\bar{J},x) \in W_{\bar{J}}x$ mit $l(M(\bar{J},x))\geq l(w)$ für alle $w\in W_{\bar{J}}x$. Die Kammern von Δ, die unter einer der beschriebenen Einbettungen auf eine feste Kammer (J,x) von $\Delta(J)$ abgebildet werden, entsprechen gerade den Elementen von $W_J x$. Wir können jetzt die Menge $M(\Delta(J)) \subseteq \text{cham } \Delta(J)$, die im Beweis von Satz (9.3) eine entscheidende Rolle spielt, anders beschreiben. Es gilt:

> Genau dann ist $(J,x)\in M(\Delta(J))$, wenn ein $y\in W_J x$ existiert mit $y=M(\bar{J},y)$.

y ist also das im $\text{stern}_\Delta(\bar{J},y)$ am weitesten von der Fundamentalkammer 1 entfernte Element. $\text{stern}_\Delta(\bar{J},y)$ wird auf die Wohnung Ay abgebildet, wobei $(J,y) = (J,x)$ gilt, da $y\in W_J x$ ist. Wähle nun zu jedem $(J,x)\in M(\Delta(J))$ ein $y(x)\in W_J x$ mit $y(x)=M(\bar{J},y(x))$. Setze $\mathcal{B} := \{Ay(x) \mid (J,x)\in M(\Delta(J))\}$.

Der folgende Satz ist ein Resultat von Björner [2], dessen Beweis jedoch technischer ist und Eigenschaften der Bruhat-Ordnung benötigt (vgl. Deodhar[13]).

Satz. Die Menge $\{h(B)|B\in\mathcal{B}\}$ ist eine Basis von $H_{\ell_J}(\Delta(J))$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\{h(B)|B\in\mathcal{B}\}$ linear unabhängig ist. Sei $\sum_{B\in\mathcal{B}} a_B h(B) = 0$, $a_B\in\mathbb{Q}$. Ist $l(y_o(x))$ maximal in $\{l(y(x))|(J,x)\in M(\Delta(J))\}$, so liegt $(J,y_o(x)) = (J,x)$ nur in der Wohnung $B_o = Ay_o(x)$ von $\mathcal{B}$ (die Nebenklassen von W_J in W enthalten genau ein Element maximaler Länge!). Folglich ist $a_{B_o} = 0$. Das gleiche Argument angewendet auf die Menge $\{l(y(x))|(J,x)\in M(\Delta(J)) - \{(J,y_o(x))\}$ und $\mathcal{B}-\{B_o\}$, u.s.w. zeigt $a_B = 0$ für alle $b\in\mathcal{B}$.

Sei nun $z = \sum_{(J,x)\in cham\Delta(J)} a_x(J,x) \in H_{\ell_J}(\Delta(J)) = \ker\partial_{\ell_J}$.
Setze $Tr(z) := \{(J,x)\in cham\ \Delta(J)|a_x \neq 0\}$ und $TM(z) := Tr(z)\cap M(\Delta(J))$
Sei $l(y_o(x))$ maximal in $\{l(y(x))|\ (J,x)\in TM(z)\}$.
Setzen wir $B_o = Ay_o(x)\in\mathcal{B}$, so ist

$$z_o = z - a_{y_o(x)}\ h(B_o) \in H_{\ell_J}(\Delta(J))$$

und $|TM(z_o)| = |TM(z)|-1$ (gleiche Argumentation wie im ersten Teil des Beweises). Nach höchstens $|M(\Delta(J))|$ Schritten erhalten wir ein Element aus $H_{\ell_J}(\Delta(J))$, dessen Träger in $\Delta(J)^* = \Delta(J) - M(\Delta(J))$ liegt. Im Beweis von Satz (9.3) haben wir gezeigt, daß $\Delta(J)^*$ triviale Homologie besitzt. □

§12 Gruppen mit B,N-Paar und Gebäude

Chevalleygruppen sind Gruppen mit B,N-Paar. Jeder Gruppe G mit B,N-Paar läßt sich auf kanonische Weise ein Gruppenkomplex zuordnen, das Gebäude von (G,B,N). Über die Klassifikation der Gebäude und ihrer Automorphismengruppen zeigt Tits in[34], daß alle endlichen einfachen Gruppen mit B,N-Paar vom Rang ≥ 3 Chevalleygruppen sind. Wir bestimmen die Homologie von Gebäuden. Der ("klassische") Steinbergmodul einer Gruppe mit B,N-Paar ist der Tophomologiemodul des zugehörigen Gebäudes. Die Charakterformel des Steinbergmoduls ergibt sich als leichte Folgerung.

(12.1) Ein B,N-Paar vom Rang $\ell+1$ in einer Gruppe G ist ein Paar von Untergruppen $B \leq G$, $N \leq G$ mit folgenden Eigenschaften:

(B1) $\langle B,N \rangle = G$,

(B2) $B \cap N = H \trianglelefteq N$,

(B3) $W = N/H$ wird durch eine Menge von Involutionen $\{w_i \mid i \in I\}$ erzeugt, $|I| = \ell+1$, und es gilt:

(a) $w_i B w \subseteq BwB \cup Bw_iwB$,

(b) $w_i B w_i \neq B$ für alle $i \in I$.

Die grundlegenden Eigenschaften von Gruppen mit B,N-Paar können aus folgenden Monografien entnommen werden: Bourbaki [4], Chap.IV; Carter [7], Chap.8; Suzuki [31],

Chap.3, §3. B,N-Paare wurden von Tits [32] eingeführt ("Tits-Systeme"). Insbesondere gilt $G = BNB$ und W ist eine Coxetergruppe(die sogenannte Weylgruppe von G).

(12.2) Sei G eine Gruppe mit B,N-Paar. Setze $G_i = \langle B, w_j \mid j\in I, i\neq j \rangle$ für $i\in I$. Der Gruppenkomplex $\Delta = \Delta(G,(G_i)_{i\in I})$ heißt Standardkomplex von (G,B,N). Δ ist ein stabiler, umkehrbarer Gruppenkammerkomplex der Dimension ℓ. Es ist $G(i) = B \cup Bw_iB$ für $i\in I$. Die Gruppen G_J, $J\subseteq I$, und ihre Konjugierten heißen parabolische Untergruppen von G. Die Menge $\{G_J \mid J\subseteq I\}$ umfaßt sämtliche Untergruppen von G, die oberhalb von B liegen ($G_I=B$, $G_\emptyset=G$). Die Kammern von Δ entsprechen den Nebenklassen von B in G.

Sei $A := \bigcup_{n\in N} P(I,n)$. A ist ein Kammerteilkomplex von Δ und A ist als gefärbter simplizialer Komplex isomorph zu $(W,(W_i)_{i\in I})$. Also ist A ein Coxeterkomplex und damit eine Wohnung im Sinne von (11.1). Setze $\mathcal{A} = \{Ax \mid x\in G\}$.

Es läßt sich leicht zeigen (vgl. Tits [34], Theorem 3.2.6, p.40), daß Δ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(G1) Jedes Simplex der Dimension ℓ-1 von Δ liegt in mindestens 3 Kammern;

(G2) die Elemente von $\mathcal{A}$ sind dünne Kammerkomplexe;

(G3) zu $a,b\in\Delta$ existiert $A'\in\mathcal{A}$ mit $a,b\in A'$;

(G4) Seien $B,B' \in \mathcal{A}$ mit $B \cap B' \neq \emptyset$. Dann existiert ein Isomorphismus $\psi: B \to B'$, der auf $B \cap B'$ die Identität bewirkt.

(12.3) Sei Δ ein simplizialer Komplex der Dimension ℓ und sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilkomplexen von Δ. Das Paar $(\Delta,\mathcal{A})$ heißt Gebäude, falls die Bedingungen (G1)-(G4) in (12.2) erfüllt sind. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Apartments. Apartments sind Coxeterkomplexe, also Wohnungen im Sinne von (11.1) (siehe (12.3)(1)).

Der Standardkomplex einer Gruppe mit B,N-Paar ist ein Gebäude. Jedes endliche, irreduzible Gebäude $\Delta = (\Delta,\mathcal{A})$ der Dimension $\ell \geq 2$ ist isomorph zum Standardkomplex einer Gruppe mit B,N-Paar (Tits [34], Th.(11.4)): Δ besitzt eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Färbung. Sei $G = \mathrm{Taut}\,\Delta$ die Gruppe der bezüglich dieser Färbung typerhaltenden Automorphismen von Δ. Ist $c \in \mathrm{cham}\,\Delta$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $c \in A$, so definieren $B = \mathrm{Stab}_G(c)$ und $N = \mathrm{Stab}_G(A)$ ein B,N-Paar in G.

Sei $\Delta = (\Delta,\mathcal{A})$ ein Gebäude. Die Beweise der folgenden Aussagen sind in Tits[34] zu finden.

(1) Die Elemente von $\mathcal{A}$ sind isomorphe Coxeterkomplexe (Theorem 3.7, p.43).

(2) Seien $c,c' \in \text{cham } \Delta$. Es bezeichne wie in (11.3) $d(c,c')$ den Abstand der Kammern c und c'. Sei $a \in \Delta$. Es existiert eine eindeutig bestimmte Kammer $b \in \text{estern}_\Delta(a)$ mit $d(b,c)$ minimal. Für jede weitere Kammer $b' \in \text{estern}_\Delta(a)$ gilt:

$$d(b',c) = d(b',b) + d(b,c).$$

Ist $b'=b_0,b_1,\ldots,b_n=b$ eine kürzeste Folge mit b_i,b_{i+1} benachbart, so ist $b_i \in \text{estern}_\Delta(a)$ für alle $i=1,\ldots,n$ (3.16.6, S.51).

(3) Sei $\text{diam } \Delta = \max\{d(c,c') \mid c,c' \in \text{cham } \Delta\}$ endlich. Seien $b,c \in \text{cham } \Delta$. Ist $d(b,c) = \text{diam } \Delta$, so existiert genau ein Apartment A, das b und c enthält, und jede b mit c verbindende Folge von Kammern liegt in A (Proposition 3.25, p.53). Es bezeichne $M(c) := \{c' \in \text{cham } \Delta \mid d(c,c') = \text{diam } \Delta\}$ für $c \in \text{cham } \Delta$ die c "gegenüberliegenden" Kammern.

Nach (1) ist jedes Apartment A eine Wohnung von Δ und definiert so nach (11.2) ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmtes $h(A) \in H_\ell(\Delta)$.

(12.4) Da die Klasse der Gebäude die der Standardkomplexe von Gruppen mit B,N-Paar umfaßt, berechnen wir zunächst die Homologie von Gebäuden (beachte, daß Gebäude gefärbte Simplizialkomplexe sind). Wie in §11 sei $H_k(\Delta) := H_k(\Delta,\mathbb{Q}) = H_k(\Delta,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$.

Der folgende Satz scheint mathematische Folklore. Man findet aber keinen expliziten Beweis in der Literatur. Für B,N-Paare stammt der Satz von Tits-Solomon [23].

Satz. Sei $\Delta = (\Delta, \mathcal{A})$ ein endliches Gebäude der Dimension ℓ. Sei $c \in \text{cham } \Delta$. Es ist $H_k(\Delta) = 0$ für $1 \leq k \leq \ell-1$; $H_0(\Delta) = \mathbb{Q}$ und $\dim H_\ell(\Delta) = |M(c)|$. Zu $b \in M(c)$ bezeichnen wir mit $A(b)$ das eindeutig bestimmte Apartment von Δ, das b und c enthält. Setze $\mathcal{B} = \{A(b) \mid b \in M(c)\}$. Dann ist $\{h(A)\}_{A \in \mathcal{B}}$ eine Basis von $H_\ell(\Delta)$.

Beweis. Da Δ ein Kammerkomplex ist, ist $H_0(\Delta) = \mathbb{Q}$ ((3.8), Beispiel 1). Wir zeigen als nächstes, daß der Komplex

$$\Delta^* = \Delta - M(c)$$

triviale Homologie besitzt. Dazu definieren wir eine Folge von Komplexen

$$\Delta_i := \bigcup_{\substack{b \in \text{cham } \Delta \\ d(b,c) \leq i}} \mathbf{P}(b)$$

Wir zeigen induktiv, daß Δ_i für jedes $i<r$ triviale Homologie besitzt. Sei dies als richtig angenommen für alle $i<k$ mit festem $k<r-1$. Wir argumentieren in mehreren Schritten:

(i) Sei $b \in \text{cham } \Delta_k - \text{cham } \Delta_{k-1}$. Sei $a \in \Delta_{k-1}$ eine Seite von b, so existiert eine Seite a' von b derart, daß $\dim a' = \ell-1$ und $a' \in \Delta_{k-1}$ ist.

Nach (12.3)(2) existiert eine eindeutig bestimmte Kammer $c' \in \text{stern}_\Delta(a)$ mit minimalen Abstand zu c.

Wegen $a \in \Delta_{k-1}$ ist $c' \neq b$. Wiederum nach (12.3)(2) existiert eine Kammer $b' \in \text{stern}_\Delta(a)$ mit $d(c,b') = d(c,b) - 1$. Setze $a' := b \cap b'$.

(ii) Sei $b \in \text{cham}\,\Delta_k - \text{cham}\,\Delta_{k-1}$. Es gibt eine Seite a der Dimension $\ell-1$ von b, die nicht in Δ_{k-1} liegt.

Enthalte $A \subset \Delta$ die Kammern c und b. Sei $c_o \in A$ die eindeutig bestimmte Kammer in A mit $d(c,c_o) = r$. Nach (12.3)(2) existiert eine Folge von Kammern

$$c=b_o, b_1, \ldots, b_s=b, b_{s+1}, \ldots, b_r=c_o$$

mit b_i, b_{i+1} benachbart für $i=0,\ldots,r-1$. Setze $a := b \cap b_{s+1}$.

(iii) Sei $b \in \text{cham}\,\Delta_k - \text{cham}\,\Delta_{k-1}$. Dann ist $b \cap \Delta_{k-1}$ sternförmig. Sei a eine nach (ii) existierende Seite von b der Dimension $\ell-1$. Die a gegenüberliegende Ecke e von b liegt in jeder Seite der Dimension $\ell-1$ von b, die von a verschieden ist; insbesondere ist $e \in \Delta_k$. Mit (i) folgt die Behauptung.

(iv) Seien $b, b_1 \in \text{cham}\,\Delta_k - \text{cham}\,\Delta_{k-1}$. Ist $b \neq b_1$, so ist $b \cap b_1 \subseteq \Delta_{k-1}$. Sei b_o die eindeutig bestimmte Kammer in $\text{stern}_\Delta(b \cap b_1)$ mit minimalem Abstand von c. Dann ist $d(b_o,c) < d(b,c) = d(b_1, c) = k$.

(v) Δ_k besitzt triviale Homologie.

Sei $b \in \text{cham}\,\Delta_k - \text{cham}\,\Delta_{k-1}$. Nach (iii) ist $b \cap \Delta_{k-1}$ sternförmig, besitzt also triviale Homologie. Nach Lemma (3.8) gilt damit:

$$H_i(\Delta_{k-1} \cup b) = H_i(\mathbb{P}(b)) = 0 \text{ für alle } i \geq 1.$$

Ist $c' \in M(c)$, so liegt wegen (12.3) jede Seite der Dimension $\ell-1$ von c' in $\Delta_{r-1}=\Delta^*$. Wegen $H_i(\Delta^*)=0$ für alle $i>1$ ist $H_i(\Delta)=0$ für $1<i<r-1$.

Es bleibt die Beschreibung von $H_\ell(\Delta)$. Wegen $H_\ell(\Delta^*)=0$ ist dim $H_\ell(\Delta)<|M(c)|$. Nach (12.3)(1) sind die Apartments von Δ Coxeterkomplexe, also Wohnungen von Δ. Für jedes $A \in \mathcal{B}$ ist daher nach (11.2)

$$0 \neq H_\ell(A,\mathbb{Z}) = \langle h(A) \rangle_{\mathbb{Z}} \leq H_\ell(\Delta,\mathbb{Z}).$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\{h(A)\}_{A \in \mathcal{B}}$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig ist. Dies ergibt sich aus der Darstellung von $h(A) = \sum_{x \in \text{cham } A} \alpha(x)x$ mit $\alpha(x)=\pm 1$ und der Tatsache, daß jedes $b \in M(c)$ in genau einem $A \in \mathcal{B}$ liegt. □

Simpliziale Komplexe Δ, die nur die Bedingungen (G2) bis (G4) erfüllen, heißen schwache Gebäude. Ist Δ ein schwaches Gebäude, dessen Apartments Coxeterkomplexe sind, so gelten (12.2)(2) und (12.2)(3) ebenfalls. (Für die Beweise der Sätze 3.19.6 und 3.25 in Tits [34], wird Axiom (G1) nicht benötigt.) Folglich gilt für diese Komplexe ebenfalls Satz (12.4). Beispiele schwacher Gebäude, die keine Gebäude sind, sind $(\mathbb{A},\Omega_1 \cup \Omega_2)$ und $(\mathbb{D},\Omega)$ (Bezeichnungen wie in §6).

Umgekehrt gilt jedoch nicht, daß zu jedem Gruppenkomplex Δ mit "gebündelter" Homologie (d.h. $H_0(\Delta)=\mathbb{Q}$, $H_k(\Delta)=0$, $1 \leq k \leq \ell-1$ $H_\ell(\Delta) \neq 0$) eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Wohnungen von Δ derart existiert, daß $(\Delta,\mathcal{A})$ ein schwaches Gebäude ist. Der Komplex $\mathbb{C}$ in (6.3) ist ein Beispiel dafür.

(12.5) Wie schon erwähnt (s.o.) wurde (12.4) von Solomon [23] für Gruppen mit B,N-Paar bewiesen (siehe auch Garland [14], Appendix II). Einen anderen Beweis mittels Endomorphismenalgebren von Homologiedarstellungen haben kürzlich Curtis und Lehrer [11]gegeben.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, stellen wir einige einfache Betrachtungen an, die gewisse Analogien herausheben sollen.

Sei G eine endliche Gruppe mit B,N-Paar vom Rang $\ell+1>2$, $\Delta = \Delta(G,B,N)$ ihr Standardkomplex. In (12.2) haben wir schon vermerkt, daß jedes Apartment von Δ der Form Ax ist für $x\in G$ und $A = \bigcup_{n\in N} P(I,n)$ (cham $A = \{Bn \mid n\in N\}$). Genau dann liegt die Fundamentalkammer $(I,1)$ in Ax, wenn $x\in NB$ ist. Der Abstand der Kammer (I,nb) für $n\in N$ und $b\in B$ von der Fundamentalkammer $(I,1)$ ist gleich $l(w)$, falls $w=(B\cap N)n$ ist. Nach Bourbaki [4], p.43, Ex.22 enthält W ein eindeutig bestimmtes Element w_o maximaler Länge. Da je zwei Kammern von Δ in einer gemeinsamen Wohnung liegen, und da G transitiv auf cham Δ operiert, ist also diam $\Delta = l(w_o)$. Es ist $M(I,1) = \{I, w_o b \mid b\in B\}$, d.h. $|M(I,1)| = |B/B\cap w_o B w_o|$. Wir können nun Satz (12.4) für Gruppen mit B,N-Paar formulieren.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe mit B,N-Paar vom Rang $\ell+1$, $\Delta = \Delta(G,B,N)$ ihr Standardkomplex. Dann ist $H_k(\Delta) = 0$ für $1 \leq k < \ell$; $H_0(\Delta) = \mathbb{Q}$ und $\dim H_\ell(\Delta) = |B/B \cap w_o B w_o|$. Sei $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von $B \cap w_o B w_o$ in B. Dann ist

$$\{ \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} (I, wb_i) \}_{1 \leq i \leq n}$$

eine Basis von $H_\ell(\Delta)$.

(12.6) Seien die Bezeichnungen wie in (12.5). Wegen Satz (12.4) ist $H_\ell(\Delta) = St(\Delta)$ der Steinbergmodul von Δ im Sinne von (11.2). $St(\Delta)$ ist gerade der "klassische" Steinbergmodul:

Sei G(q) eine Chevalleygruppe über dem Körper $\mathbb{F}_q$ der Charakteristik p>0. Steinberg bewies 1957 [26], daß G(q) eine irreduzible Darstellung der Dimension $|P|$, P eine p-Sylowgruppe, besitzt. Curtis zeigte 1966 [9] die Existenz einer derartigen Darstellung für Gruppen G mit B,N-Paar auf. Ferner gab er eine Beschreibung des zugehörigen Charakters als alternierende Summe von aus den parabolischen Untergruppen von G induzierten Charakteren. Solomon gab in seiner schon mehrfach zitierten Arbeit [23]die homologische Konstruktion des Steinbergmoduls entsprechend (12.5).

Folgerung. Der Charakter von St(Δ) ist

$$\mathrm{ch}(\mathrm{St}(\Delta)) = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} 1_{G_J}^{G} .$$

St(Δ) ist ein absolut irreduzibler $\mathbb{Q}G$-Modul.

Beweis. Nach Satz (12.5) ist $\lambda_\Delta = \lambda_{\Delta,\mathbb{Q}} = 1 + (-1)^{\ell}\mathrm{ch}(\mathrm{St}(\Delta))$. Aufgrund der Spurformel von Hopf-Lefschetz (5.3) gilt:

$$1 + (-1)^{\ell}\mathrm{ch}(\mathrm{St}(\Delta)) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq I} (-1)^{|J|+1} 1_{G_J}^{G} .$$

Hieraus folgt der erste Teil der Behauptung ($G_\emptyset = G$). Es bleibt der Nachweis der Irreduzibilität von $\psi = \mathrm{ch}(\mathrm{St}(\Delta))$ zu führen. Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das übliche Skalarprodukt von Charakteren. Dann gilt:

$$\langle\psi,\psi\rangle = \sum_{J,J'\subseteq I} (-1)^{|J|+|J'|} \langle 1_{G_J}^{G}, 1_{G_{J'}}^{G}\rangle .$$

Frobeniusreziprozität und Mackey-Zerlegung liefern

$$\langle 1_{G_J}^{G}, 1_{G_{J'}}^{G}\rangle = \langle (1_{G_J}^{G})_{G_{J'}}, 1_{G_J}\rangle$$

$$= \sum_{x\in R} \langle (1_{G_J\cap G_{J'}})^{G_{J'}}, 1_{G_J}\rangle ,$$

wobei R ein Repräsentantensystem für die Doppelnebenklassen von G modulo $(G_J, G_{J'})$ ist. Folglich ist $\langle 1_{G_J}^{G}, 1_{G_{J'}}^{G}\rangle = |R|$. Mit Bourbaki [4], Chap.IV, p.28 erhält man

$$\langle 1_{G_J}^{G}, 1_{G_{J'}}^{G}\rangle = \langle 1_{W_J}^{W}, 1_{W_{J'}}^{W}\rangle .$$

Aber nach (9.3),(9.4) gilt für den alternierenden (linearen) Charakter α von W eine entsprechende Darstellung wie für $\psi = \mathrm{ch}(\mathrm{St}(\Delta))$. Wir folgern $\langle\psi,\psi\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle = 1$. Also ist ψ absolut irreduzibel. □

Eine Formel für die Berechnung des Steinbergcharakters geben Curtis-Lehrer-Tits in ihrer Arbeit [12] an. Sie berechnen die Charakterwerte über Fixkomplexe der Gruppenelemente.

(12.7) Der Beweis von Satz (12.5) geht ganz analog zum Beweis von Satz (9.3)(Fall J=I). Es überrascht deshalb nicht, daß es eine zum Satz (9.3) analoge Fassung für Standardkomplexe von Gruppen mit B,N-Paar gibt. Das Ergebnis ist von Surowski [27]. Den Beweis führen wir nicht aus, da er fast wörtlich von (9.3) übertragen werden kann.

Satz. Sei G eine endliche Gruppe mit B,N-Paar vom Rang $\ell+1$, und es seien die übrigen Bezeichnungen wie in (12.1). Sei $J \subseteq I$ mit $|J| \geq 2$. Dann gilt:

(i) $H_0(\Delta(J)) = \mathbb{Q}$,

(ii) $H_k(\Delta(J)) = 0$ für $1 \leq k \leq \ell_J$,

(iii) $H_{\ell_J}(\Delta(J)) \neq 0$.

Eine Basis von $H_{\ell_J}(\Delta(J))$ kann in der gleichen Weise wie in (11.5) für die abgeleiteten Komplexe von Coxeterkomplexen angegeben werden. Setzen wir $\alpha_J = ch(H_{\ell_J}(\Delta(J))$ für $|J|\geq 2$, $\alpha_i = 1_{G_i}^G - 1$ für $i\in I$ sowie $\alpha_\emptyset = 1_G$, so gilt

$$1_B^G = \sum_{J\subseteq I} \alpha_J \ .$$

Die QG-Moduln $H_{\ell_J}(\Delta(J))$ sind für $J\neq I$ i.allg. nicht irreduzibel. Einige irreduzible Teilmoduln hat Surowski (vgl. [28], [29]) beschrieben.

(12.8) Die Resultate in (9.3), (11.5) und (12.7) hat kürzlich auch Björner bewiesen [2]. Björner betrachtet "schälbare Komplexe". Sei Δ ein ℓ-dimensionaler simplizialer Komplex, in dem alle Kammern die Dimension ℓ besitzen. Δ heißt schälbarer Komplex, falls es eine Totalordnung $c_0, c_1, \ldots,$ auf cham Δ gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) für alle $k\geq 1$ gilt $\dim((\bigcup_{i\leq k-1} P(c_i)) \cap P(c_k)) = \ell-1$,

(ii) jede Seite von c_k, die in $\bigcup_{i\leq k-1} P(c_i)$ liegt, liegt in einer Seite der Dimension $\ell-1$ von c_k in $\bigcup_{i\leq k-1} P(c_i)$.

Man sieht unmittelbar, daß man wie in den Beweisen der Sätze (9.3) und (12.4) mit Hilfe von Lemma (3.8) zeigen kann:

$$H_0(\Delta,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\ H_k(\Delta,\mathbb{Z}) = 0 \text{ für } i=1,\ldots,\ell-1,\ H_\ell(\Delta,\mathbb{Z}) \neq 0.$$

Ferner ist rang $H_\ell(\Delta,\mathbb{Z})$ gleich der Anzahl der Zahlen $k\geq 0$, mit der Eigenschaft, daß alle $(\ell-1)$-dimensionalen Seiten der Kammer c_k in $\bigcup_{i<k} \mathbb{P}(c_i)$ liegen.

Ist W eine Coxetergruppe, so macht jede lineare Fortsetzung der Bruhat-Ordnung auf W (vgl. Deodhar [13]) den Standardkomplex in W zu einem schälbaren Komplex. Ähnlich geht man bei Standardkomplexen von Gruppen mit B,N-Paar vor.

Literaturverzeichnis

1. Biggs, N.L.: Algebraic Graph Theory. Cambridge Univ. Press 1974

2. Björner, A.: Some combinatorial and algebraic properties of Coxeter complexes and Tits buildings. Preprint 1982

3. Bourbaki, N.: Algèbre commutative.Chap.1: Modules plats. Paris: Hermann 1961

4. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie. Chap. IV, V,VI. Paris: Hermann 1968

5. Bredon, G.E.: Introduction to Compact Transformation Groups. New York - San Francisco - London: Academic Press 1972

6. Buekenhout, F.: The basic diagramm of a geometry. In: Geometries and Groups. Proceedings (Berlin 1981),1-29. Lecture Notes in Math.893. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1981.

7. Carter, R.W.: Simple Groups of Lie Type. London - New York - Sydney - Toronto: John Wiley 1972

8. Coxeter, H.S.M.: The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2=(R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$. J.London Math. Soc. 10, 21 - 25 (1935)

9. Curtis, C.W.: On the Steinberg character of a finite group with (B,N)-pair. J.Algebra 4, 433-441 (1966)

10. Curtis, C.W.: Homology representations of finite groups. In: Representation Theory II, Proceedings (Ottawa 1979), 177-194. Lecture Notes in Math. 832. Berlin - Heidelberg - New York : Springer 1980

11. Curtis, C.W., Lehrer, G.I.: Homology representations of finite groups of Lie type. In: Papers in Algebra, Analysis and Statistics. Proceedings (Hobart 1981), 1-28. Providence, Rhode Island: Amer.Math.Soc. 1982

12. Curtis, C.W., Lehrer, G.I., Tits, J.: Spherical buildings and the character of the Steinberg representation. Invent. Math. 58, 201 - 210 (1980)

13. Deodhar, V.V.: Some caracterisations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function. Invent.Math. 39, 187 - 198 (1977)

14. Garland, H.: p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups. Ann. of Math.(2) 97, 375 - 423 (1973)

15. Goldschmidt, D.M.: Automorphisms of trivalent graphs. Ann. of Math.(2) 111, 377-406 (1980)

16. MacLane, S.: Homology. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1967

17. Ott, K.: Bericht über Heckealgebren und Coxeteralgebren endlicher Geometrien. In: Finite Geometries and Designs. Proceedings (Isle of Thorns 1980),260-271. London Math. Soc. Lecture Notes

Series 49. Cambridge Univ.Press 1981

18. Ott,K.: Some remarks on representation theory in finite geometry. In: Geometries and Groups. Proceedings (Berlin 1981),68-110. Lecture Notes in Math.893. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1981

19. Schmid, P.: (Co-)Homologie und Darstellungstheorie. Vorlesungsausarbeitung Tübingen WS 1981/82.

20. Serre, J.-P.: Trees. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1980

21. Solomon, L.: The orders of the finite Chevalley-groups. J.Algebra 3,376-393 (1966)

22. Solomon, L.: A decomposition of the group algebra of a finite Coxeter group. J.Algebra 9, 220-239 (1968)

23. Solomon, L.: The Steinberg character of a finite group with BN-pair. In: Theory of Finite Groups. Proceedings (Cambridge, Mass. 1968), 213-221. New York: Benjamin 1969

24. Spanier, E.H: Algebraic Topology. New York - London - Sydney: McGraw - Hill 1966

25. Stanley, R.P.: Balanced Cohen-Macaulay complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 249, 139-157 (1979)

26. Stanley, R.P.: Some aspects of groups acting on finite posets. J.Combinatorial Theory , Ser. A 32, 132 – 161 (1982)

27. Steinberg, R.: Prime power representations of finite linear groups (II). Canad.J.Math.9, 347-351 (1957)

28. Surowski, D.B.: A reflection sieve for finite BN-pairs of types A_n, B_n and C_n. J.Algebra 73, 538-551 (1981)

29. Surowski, D.B.: Reflection compound representations of groups of type A_n, B_n or C_n. J. Algebra 78, 239-247 (1982)

30. Surowski, D.B.: Reflection sieve obstructions in finite groups of type D_n. J.Algebra 80, 552-558 (1983)

31. Suzuki, M.: Group Theory I. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1982

32. Tits, J.: Théorème de Bruhat et sous groupes paraboliques. C.R. Acad.Sci.Paris, Sér. A ,254, 2910 - 2912 (1962)

33. Tits, J.: Structures et groupes de Weyl. Séminaire Bourbaki. Exposé 288 (1965)

34. Tits, J.: Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs. Lecture Notes in Mathematics 386. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1974

35. Tits, J.: A local approach to buildings. In: The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift (Ch. Davis, B. Grünbaum und F.A. Sherk, Hrsg.),519 -547. New York - Heidelberg - Berlin: Springer 1981

36. Witt, E: Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe. Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 14, 289-322 (1941)

Bezeichnungen

Stets ist Δ ein simplizialer Komplex, I eine endliche Menge der Ordnung $\ell+1$, G eine Gruppe. Ist $J \subseteq I$, so ist $\bar{J} = I-J$ das Komplement von J in I.

Weitere Notationen:

$\in$	Elementzeichen
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	ganze, rationale Zahlen
$x \mid y$	$x \in \mathbb{Z}$ ist Teiler von $y \in \mathbb{Z}$
$\lvert G \rvert$	Ordnung der endlichen Gruppe G
$H \leq G$	H ist Untergruppe von G
$H \trianglelefteq G$	H ist Normalteiler von G
$N_G(H)$	Normalisator der Untergruppe H in G
G:H	(Rechts-)Nebenklassen der Untergruppe H in G
$\langle H,K \rangle$	die von den Untergruppen H,K erzeugte Untergruppe in G
$G_1 \times G_2$	direktes Produkt der Gruppen G_1, G_2
H^x	die unter $x \in G$ zu H konjugierte Untergruppe von G ($=x^{-1}Hx$)
Z_n	zyklische Gruppe der Ordnung n
D_{2n}	Diedergruppe der Ordnung 2n
Sym(n), Alt(n)	symmetrische, alternierende Gruppe auf n Elementen
$K_{n,m}$	vollständiger bipartiter Graph
$\mathbb{P}(s)$	Potenzmenge der Menge s
$Stab_G(s)$	Stabilisator von s in G, s Teilmenge einer G-Menge

Lebenslauf

Am 4. Februar 1952 wurde ich als Sohn des Zollbeamten Gerhard Scheller und seiner Ehefrau Helene Scheller, geb. Albers in Hamburg geboren. Von 1958 bis 1963 besuchte ich Volksschulen auf Juist, Baltrum und in Tübingen. Im Frühjahr 1963 trat ich in das Kepler-Gymnasium ein, an dem ich im Juni 1971 das Abitur bestand. Im Wintersemester 1971/72 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen, an der ich dann im Oktober 1978 die Diplomprüfung in Mathematik ablegte. Vom April 1975 bis zum Oktober 1982 war ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität angestellt. Die vorliegende Arbeit entstand unter der Anleitung von Professor Dr. P. Schmid.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren M. Baumann, H. Fischer, F. Gönnenwein, W. Grölz, H. Hähl, Ch. Hering, H. Heyer, W. Knapp, P. Kramer, H. Krüger, F. Locher, R. Nagel, H.H. Schaefer, P. Schmid, E. Siebert, O. Tamaschke und H. Wielandt.